This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

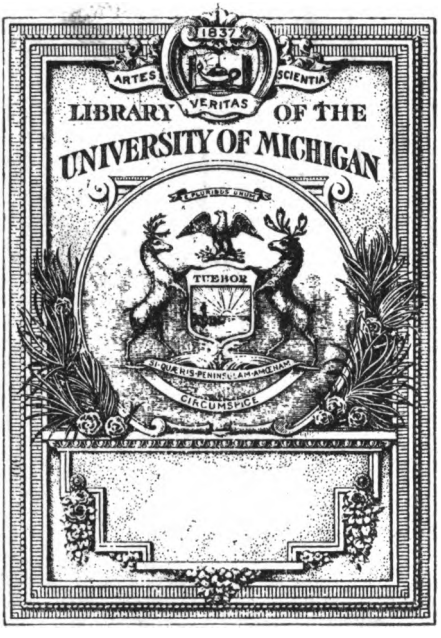
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 50722 8



Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.M56

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BENOIT.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VIII. — ANNÉE 1898.

(TOME XVIII DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS&FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1898

Digitized by Google

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

CGQ., Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par GARNIER et QUETELET, continuée par QUETELET.

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

Digitized by Google

MATHESIS

SUR L'INTERPRÉTATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE(1);

par M. F. DAUGE, professeur à l'Université de Gand.

Dans les derniers numéros du recueil mathématique *Mathesis*, M. le professeur Mansion a continué la publication de ses intéressantes études sur la géométrie non euclidienne.

Le numéro de juillet 1897, notamment, contient l'extension à la géométrie non euclidienne de Riemann d'une démonstration du théorème suivant : Si une droite est perpendiculaire à deux autres qui se croisent à son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied dans ce plan.

Cette démonstration est irréprochable au point de vue des formules et des calculs sur lesquels elle est fondée; mais on peut se demander comment il faut l'interpréter au point de vue de la géométrie.

On sait qu'il existe deux systèmes de géométrie autres que celui d'Euclide et que, suivant l'auteur de la notice dont il s'agit, un seul de ces systèmes est réalisé dans la nature sans que nous sachions si c'est celui d'Euclide, celui de Lobatchefsky ou celui de Riemann (2). Tout au plus pourrions-nous affirmer que le système qui est réalisé diffère peu du système d'Euclide (*).

Telle n'est pas notre manière de voir. Il s'agit d'abord de savoir ce qu'on entend par système réalisé dans la nature. Selon nous on pourrait dire à la rigueur qu'aucun des trois systèmes n'est réalisé dans la nature, parce que les figures géométriques sur lesquelles nous raisonnons ne sont que de pures abstractions. Ce sont des êtres de raison dont l'idée nous est suggérée, il est vrai, par le monde matériel dans lequel nous vivons,

---

(1) Les chiffres gras dans le texte de l'article de M. Dauge renvoient aux passages de l'article : *Pour la Géométrie non euclidienne* (en abrégé PGNE) où nous exprimons des vues autres que celles de notre savant collègue ; il paraîtra dans la livraison suivante de *Mathesis* (P. Mansion). (2) Voir PGNE, nos I-X.

(*) *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, par P. MANSION, appendice III : Sur la portée philosophique de la Métagéométrie. — Voir aussi divers articles publiés dans *Mathesis*.

370477

Digitized by Google

mais qui cependant ne se montrent jamais dans les corps qui nous entourent, du moins avec le degré de perfection que nous leur attribuons en imagination. Mais si nous ne rencontrons pas ces figures toutes formées, au moins pouvons-nous nous demander si elles sont susceptibles d'être réalisées et alors nous arrivons à la conclusion qu'il est possible de construire un grand nombre d'entre elles à l'aide d'instruments et, par conséquent, de les réaliser d'une manière d'autant plus approchée que nos procédés et nos instruments sont plus parfaits. Avec des instruments parfaits, un artiste doué d'une habileté parfaite les produirait telles que nous les concevons, et l'on peut dire de celles-là qu'elles sont *réalisables* dans la nature. Et dire d'un système qu'il est réalisé dans la nature, cela ne saurait, nous paraît-il, avoir un sens que si cela signifie qu'il est réalisable, c'est-à-dire que les figures de ce système peuvent se construire. Il reste donc à savoir si toutes les figures de la géométrie non euclidienne peuvent être construites ou si quelques-unes ne sont pas analogues aux lignes imaginaires de la géométrie analytique dont la considération est fort utile en analyse, mais qu'il ne serait pas possible d'obtenir par des constructions réelles.

A cette question nous répondons, pour des motifs que nous indiquerons, que toutes les figures de la *planimétrie* sont réalisables dans les trois systèmes de géométrie, avec cette restriction que l'on ne peut pas prendre à la lettre le langage dont on se sert pour démontrer leurs propriétés dans les deux systèmes non euclidiens et que pour construire les figures des deux planimétries non euclidiennes, il faut s'appuyer sur la géométrie d'Euclide; mais qu'il n'est probablement pas possible de construire les figures non euclidiennes à trois dimensions. Dans le système de Riemann l'impossibilité de les construire nous semble même manifeste, et nous allons essayer de justifier cette assertion.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons, comme on le fait habituellement, que l'espace est infini (2) et homogène et nous examinerons d'abord d'où nous viennent les notions de droite et de plan.

L'observation nous montre des corps terminés par des surfaces, tantôt concaves, tantôt convexes, dont les courbures sont plus ou moins prononcées et peuvent, dans les deux cas, diminuer indéfiniment; dès lors on conçoit la possibilité d'un état intermédiaire où il n'y a de cour-

(2) Selon nous, on doit dire *indéfini* ou *illimité*. Voir PGNE, II. (P. M.).

Digitized by Google

bure ni dans un sens ni dans l'autre; ainsi l'on acquiert forcément la notion du plan et d'une manière analogue celle de la ligne droite. Ce ne sont donc là que des choses créées par notre imagination, que nous ne voyons jamais réalisées avec le degré de perfection que nous leur attribuons, mais dont la conception est cependant si nette dans notre esprit que, par intuition, nous saisissons quelles en sont les formes et les propriétés fondamentales.

Rappelons que l'on ne peut pas *tout* définir ni *tout* démontrer, puisque pour définir ou démontrer une chose, il faut déjà en avoir défini ou démontré certaines autres. Selon nous, le plan et la ligne droite sont au nombre des choses dont il est impossible de donner de bonnes définitions, parce que les définitions qu'on en donne supposent certaines propositions qu'on ne sait pas démontrer; mais cela ne nuit en rien à la certitude mathématique. Une définition n'a pour but que de nous faire connaître parfaitement l'objet que l'on veut définir. Or, quiconque s'est occupé de géométrie s'est fait, avant d'entendre parler des figures non euclidiennes, une idée claire et précise des propriétés de la ligne droite et du plan (4). C'est par les considérations que nous venons d'indiquer que, peut-être à notre insu, nous avons acquis la connaissance de ces propriétés, et que nous voyons que *ce qui caractérise le plan c'est qu'on peut en détacher une partie quelconque et l'appliquer partout ailleurs sur le même plan ou sur tout autre*, SANS FLEXION ET AVEC OU SANS RENVERSEMENT.

Les géomètres non euclidiens établissent une distinction entre la *droite* et la *géométrie idéales*, et la *droite* et la *géométrie physiques*. Nous avouons ne pas comprendre la nécessité de faire cette distinction. Pour nous il n'y a qu'une droite; c'est celle dont nous venons de parler. Nous ne pouvons l'embrasser tout entière parce qu'elle peut se prolonger à l'infini et elle est idéale en ce sens que nous pouvons, en imagination, nous en représenter une portion plus ou moins étendue; il est d'ailleurs possible de réaliser matériellement celle-ci d'une manière très approchée et d'obtenir, par cette construction, ce que nous croyons être la droite physique des géomètres non euclidiens; mais il n'y a là qu'une distinction sans importance.

De même, la géométrie est idéale en ce sens qu'elle ne s'occupe pas

(4) Selons nous, on n'a jusqu'alors que l'idée générale de la ligne droite. Voir PGNE, III, XI. (P. M).

Digitized by Google

d'objets matériels, mais d'êtres abstraits; ceux-ci, à la vérité, sont nés dans notre entendement par la contemplation de la nature, et les propriétés dont ils jouissent sont applicables à l'étude des formes et à la mesure des objets qui tombent sous nos sens; mais nous ne voyons pas qu'il faille pour cela parler d'une géométrie physique, pas plus qu'on ne parle d'une arithmétique physique parce que les nombres abstraits trouvent leur application dans une foule de questions relatives au monde matériel.

Les propriétés de la ligne droite, telle que nous venons de la considérer, sont inconciliables, comme nous le verrons, avec celles que l'on attribue aux droites non euclidiennes; celles-ci ne sont donc pas des lignes droites; elles sont autre chose et leurs propriétés s'accordent parfaitement avec celles des lignes géodésiques tracées sur des surfaces sphériques ou pseudosphériques. C'est ce qui nous fait dire que les figures de la planimétrie non euclidienne, qui ne se comprennent pas dans l'hypothèse du plan, se conçoivent au contraire très bien et peuvent être réalisées à la condition qu'on substitue une sphère à ce qu'on nomme plan dans le système de Riemann et une pseudosphère à ce qu'on appelle plan dans le système de Lobatchefsky. A ce qu'on nomme ligne droite dans le premier cas il faut substituer un grand cercle; à ce qu'on nomme ligne droite dans le second cas il faut substituer une ligne géodésique de la pseudosphère et ce serait alors par une confusion de langage que l'on appliquerait les noms de droite et de plan.

M. E. Beltrami a très bien fait voir pourquoi cette confusion (5) est possible et pourquoi l'on peut raisonner sur les surfaces pseudosphériques et sur leurs lignes géodésiques comme si c'étaient des plans et des droites situées dans ces plans. Cela tient à ce qu'une portion quelconque d'une surface pseudosphérique peut être appliquée sur une autre portion quelconque de cette même surface par simple *flexion*; et cela de telle façon que si sur chacune des deux portions de surface que l'on superpose il existe une ligne géodésique et que l'on fasse coïncider deux points quelconques de l'une de ces lignes avec deux points de l'autre, ces lignes coïncident dans toute leur étendue. Cette règle ne souffre d'ailleurs aucune exception, deux lignes géodésiques distinctes ne pouvant jamais, sur ces surfaces, avoir deux points communs. Il n'y a

(5) Voir PGNE, XX.

Digitized by Google

donc dans les démonstrations aucune différence entre ce cas et celui où l'on superpose deux plans en faisant coïncider deux points d'une droite située dans l'un de ces plans avec deux points d'une droite située dans l'autre, si ce n'est que la superposition ne peut se faire qu'avec flexion d'au moins une des surfaces dans le premier cas, tandis qu'il n'y a pas flexion dans le second.

Il résulte de là que dans tous les théorèmes de la planimétrie qui se démontrent par la superposition des figures égales, il est impossible d'établir une distinction entre le cas où il s'agit d'une surface plane contenant des figures formées par des droites et celui où il s'agit d'une surface pseudosphérique contenant des figures formées par des lignes géodésiques ; *la condition de la rigidité n'est pas impliquée par la définition qu'on donne du plan en géométrie non euclidienne*, et on ne la fait pas entrer dans les démonstrations ; on ne peut donc écarter, comme on devrait le faire pour rester dans la géométrie euclidienne, la possibilité de la superposition avec flexion. Pour citer un cas analogue et qui nous est plus familier, remarquons que tous les théorèmes de la planimétrie euclidienne, sans exception, resteraient vrais si l'on venait à considérer les figures comme tracées sur un cylindre, les droites des figures planes étant remplacées par des hélices sur le cylindre. Si l'on donnait au cylindre le nom de plan et aux hélices le nom de droites, on retrouverait tous les théorèmes de la planimétrie euclidienne. Il est bien entendu que, le plan s'étendant à l'infini dans tous les sens, il faudrait, dans le cas où la base du cylindre serait une courbe fermée, considérer la surface cylindrique comme pouvant être couverte d'une infinité de feuillets superposés.

Tout se passe d'une manière analogue dans la planimétrie de Lobatchefsky, mais avec cette différence que la somme des angles d'un triangle formé par trois lignes géodésiques sur une surface pseudosphérique est plus petite que deux droits, au lieu d'être égale à deux droits comme dans un triangle formé par trois lignes droites; dès lors on a l'explication des théorèmes en apparence étonnants de cette planimétrie. Tandis que, grâce à une fausse terminologie, on croit raisonner sur des plans contenant des droites, on raisonne, en réalité, sur des surfaces pseudosphériques et leurs lignes géodésiques ; par la confusion que l'on établit entre les noms de choses qui, tout en étant différentes, ont certaines propriétés communes, on rend identiques les démonstrations qui

Digitized by Google

s'appliquent aux deux cas et, par conséquent, ces démonstrations doivent nécessairement conduire à la conclusion que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ou qu'elle est moindre que deux droits, suivant qu'on admet le postulatum d'Euclide ou qu'on le rejette.

C'est pour cela qu'on ne pourra pas démontrer le dit postulatum par la superposition des figures égales aussi longtemps qu'on n'introduira pas dans les démonstrations la condition de la rigidité du plan, ce qui semble bien difficile, sinon impossible (6).

En résulte-t-il que la vérité de ce postulatum doive être révoquée en doute (7)? Nullement, puisqu'on ne saurait *tout* démontrer; le postulatum d'Euclide est une des vérités premières qu'il faut admettre pour en déduire les autres; il se présente à nous de la manière la plus naturelle; deux droites perpendiculaires à une troisième dans un plan ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge; mais si l'on incline l'une d'elles vers l'autre, si peu que ce soit, on a l'intuition (8) qu'on doit toujours finir, en les prolongeant suffisamment, par trouver un point où elles se coupent. On conçoit très bien que pour qu'il en fût autrement elles devraient avoir une forme différente de celle sous laquelle nous nous les représentons : elles devraient être courbes. Il est certain que nous avons, par intuition, la connaissance de la forme de la ligne droite (9) et que l'idée que nous nous faisons de cette forme exclut celle de la courbure, puisque le caractère d'une ligne courbe est de n'être droite dans aucune de ses parties. Il est certain aussi qu'on ne peut se représenter des lignes ayant les propriétés que l'on attribue aux droites de Lobatchefsky sans leur supposer une forme qui permette à deux de ces droites d'être asymptotes l'une de l'autre et qui les fasse ressembler plus ou moins à des hyperboles, image qui entraîne avec elle l'idée de courbure.

Remarquons ensuite que si le postulatum d'Euclide n'est pas vrai, on peut, en faisant croître suffisamment les trois côtés d'un triangle, rendre la somme des angles aussi petite qu'on le veut, en même temps que sa surface tend vers un certain maximum déterminé, qu'il est impossible de dépasser. Cela ne peut se concilier avec notre manière de concevoir la forme de la ligne droite et avec l'idée d'un espace infini, et nous fait conclure que le postulatum est vrai (10).

---

(6) Voir PGNE, XXI. (7) Voir PGNE, XXII. (8) Voir PGNE, XXIII.
(9) Voir PGNE, XXIV. (10) Voir (8) et PGNE, II.

Digitized by Google

On fait valoir en faveur de la géométrie non euclidienne que les trois géométries peuvent s'établir par le raisonnement avec la même rigueur. Mais de ce que les raisonnements sur lesquels on fonde les systèmes non euclidiens n'impliquent aucune contradiction, il n'est pas permis de conclure qu'ils reposent sur des bases réelles. Nous sommes conduits, par intuition, à admettre l'existence des postulats qui caractérisent la géométrie d'Euclide; si ensuite, écartant ces postulats, nous suivons dans les deux géométries non euclidiennes toutes les conséquences des nouvelles hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons ainsi, nous voyons plus clairement que nous trouvons des résultats manifestement contraires à la nature des choses et dès lors nous pouvons conclure, comme dans toute démonstration par la réduction à l'absurde, que le point de départ est faux et qu'en conséquence les deux postulats d'Euclide doivent être admis si l'on veut rester dans la géométrie réelle.

Nous reviendrons plus loin sur la question de la forme de la ligne droite qui a une importance capitale. C'est une de celles qui se trouvent à la base de la géométrie; car, si nous ne connaissions intuitivement cette forme, nous n'aurions aucun moyen de la déterminer, pas plus que celle d'aucune autre ligne, et la science des figures ne reposerait plus sur aucune donnée certaine.

D'après ce qui précède nous ne voyons aucun motif pour jeter sur le postulatum d'Euclide un doute (11) qui semblerait entourer la planimétrie de Lobatchefsky d'une sorte de mystère, alors que M. E. Beltrami en a donné une explication bien simple en prouvant que, si elle ne se comprend pas dans l'hypothèse du plan, elle devient très claire quand on substitue au plan une pseudosphère, ce qui permet de réaliser toutes les figures de cette planimétrie.

Mais, s'il est possible de construire ainsi les figures dites *planes* de Lobatchefsky, nous croyons qu'il n'en est pas de même des figures à trois dimensions de ce célèbre géomètre et nous avons indiqué(*) quelques motifs pour lesquels nous considérons la réalisation de ces figures comme une impossibilité.

En ce qui concerne la planimétrie de Riemann, plus singulière encore,

---

(11) Voir PGNE, note XXV.

(*) Voir : *Mathesis*, janvier 1896, p. 10 et *Cours de Méthodologie mathématique*, 2e éd., p. 213.

Digitized by Google

en apparence, que celle de Lobatchefsky, elle s'explique aussi, et même plus simplement que cette dernière. Il est aisé de voir que, dans ce cas également, on donne les noms de plans et de droites à des surfaces et à des lignes qui ne sont ni planes ni droites (12).

Cette géométrie est fondée sur le rejet du postulat suivant : Deux droites ne peuvent entourer un espace ou, en d'autres termes, deux droites distinctes ne peuvent avoir deux points communs sans se confondre. Si, rejetant ce postulat, on admet qu'il existe deux droites distinctes ayant deux points communs, on est forcé d'admettre qu'à chaque point de l'espace il en correspond un autre, qui est dit son opposé, qui est tel que toute droite passant par l'un de ces points passe aussi par l'autre et que la distance de ces deux points opposés, partout la même, constitue un maximum que ne peut dépasser la distance de deux points quelconques de l'espace (**). On est aussi obligé d'admettre que la droite est une ligne fermée, rentrante sur elle-même ; si bien que s'il était possible de suivre indéfiniment une ligne droite dans l'espace, en cheminant toujours dans le même sens, on finirait par revenir au point de départ. Le plan serait, dans cette même hypothèse, une surface fermée analogue à la sphère.

Ces notions ne sont-elles pas en contradiction avec notre manière de concevoir l'espace? Celui-ci étant infini, peut-on admettre qu'il soit impossible de s'éloigner d'un point donné, au moins par la pensée, jusqu'à une distance quelconque, quelque grande qu'elle soit?

Les propriétés que l'on attribue à la droite et au plan en géométrie riemannienne auraient sans doute été considérées comme absurdes si de savants géomètres ne leur avaient donné en apparence un certain fondement en les démontrant à l'aide de raisonnements dont la rigueur ne peut être contestée quand on accepte le point de départ, c'est-à-dire quand on suppose que deux droites distinctes peuvent avoir deux points communs ; mais puisque ces démonstrations rigoureuses conduisent à des conséquences inacceptables, c'est que le point de départ n'est pas vrai.

Il est à observer, d'ailleurs, que les démonstrations de la *planimétrie* riemannienne et leurs conséquences deviennent parfaitement rigoureuses

---

(12) Voir PGNE, XX.

(**) Voir notamment : *Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale* par P. MANSION, supplément au n° d'octobre 1896 de *Mathesis*.

Digitized by Google

quand on les interprète convenablement. Ce qu'on nomme plan dans ce système donnons-lui le nom de sphère; ce qu'on nomme ligne droite appelons-le grand cercle de la sphère et tout devient d'une parfaite clarté.

Mais ici encore, s'il est possible de concevoir et de construire les figures dites *planes* de Riemann, on ne voit pas comment on pourrait construire les figures à trois dimensions dans ce système(13).

Prenons, par exemple, cette définition de la ligne droite donnée par Cauchy et admise par les géomètres non euclidiens : *La ligne droite* AB *est une ligne telle que chacun de ses points est distant de* A *et de* B *comme ne l'est aucun autre point de l'espace.* Cette définition, ou plutôt cette proposition, exacte d'une manière absolue quand il s'agit d'une droite proprement dite, peut être étendue à un grand cercle d'une sphère, si l'on ajoute la restriction que l'on ne considère que l'espace à deux dimensions constitué par la surface de la sphère; on a alors une droite riemannienne; deux des droites ainsi définies se coupent en deux points opposés puisque ce sont deux grands cercles qui se coupent aux extrémités d'un diamètre, et toutes celles qui passent par l'un de ces points passent aussi par l'autre. Les grands cercles jouissent donc sur la sphère des propriétés attribuées aux droites riemanniennes dans le plan riemannien.

Prenons maintenant cette autre définition donnée par Leibnitz : *La droite est le lieu des points immobiles d'un corps qui se meut, deux de ses points restant fixes;* la considération des trois dimensions de l'espace intervient nécessairement ici et l'on ne voit pas que cette définition puisse s'accorder avec les propositions de la géométrie riemannienne, comme le voudraient les géomètres non euclidiens.

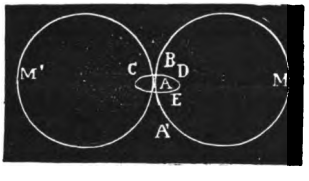
Conçoit-on qu'une ligne fermée puisse tourner autour de deux de ses points sans que ses autres points sortent du lieu qu'ils occupent(14)? C'est cependant ce qu'exige la définition et ce qu'on doit admettre en géométrie riemannienne. Et de plus, si l'on fait tourner autour de cet axe un système de points qui s'y trouvent invariablement liés, quelles que soient la forme et l'étendue de ce système, tous ses points doivent passer successivement dans l'intérieur de la ligne fermée autour de laquelle ils tournent comme au travers d'un anneau. Un tel mouvement est-il possible sans qu'il y ait déformation(15)? Pour mieux voir à quelles

(13) Voir PGNE, XXVI. (14) Voir PGNE, XXVII. (15) Voir PGNE, XXVIII.

Digitized by Google

étranges conséquences cela conduirait, considérons le solide terminé à la surface fermée d'un plan riemannien comme invariablement lié à une droite située dans ce plan et faisons faire au plan une demi révolution autour de cette droite regardée comme un axe fixe; le plan ainsi renversé doit s'appliquer sur lui-même, mais dans une position telle que la face qui était primitivement tournée vers l'intérieur se trouve maintenant à l'extérieur et réciproquement. Le solide invariablement lié à l'axe de rotation, qui occupait l'intérieur du plan riemannien, doit donc, après cette demi révolution, occuper tout l'espace extérieur, tandis que l'espace qui était extérieur doit se trouver à l'intérieur. Ces deux espaces devraient donc pouvoir, par rotation autour d'un axe fixe, s'appliquer exactement l'un sur l'autre? On ne saurait échapper à cette absurdité qu'en soutenant, comme le fait notre savant contradicteur, que la surface fermée qu'il appelle plan riemannien divise l'espace riemannien en deux parties identiques dont aucune ne peut être dite plus que l'autre intérieure ou extérieure à cette surface (16). Mais la raison se refuse à admettre qu'une surface fermée puisse ne pas entourer complètement une région intérieure limitée de toutes parts, et nettement distincte d'une région extérieure illimitée; et elle nous montre clairement que les deux régions ainsi séparées ne peuvent pas être identiques (17).

D'autres propriétés des figures riemanniennes à trois dimensions ne semblent pas moins contraires à la réalité des choses. Soit un élément linéaire infiniment petit AB et, pour fixer les idées, plaçons-le verticalement. Si on le prolonge indéfiniment on obtient une droite qui, dans le système riemannien, est une ligne fermée ABMA'. Comment se fait-il qu'un tel élément infiniment petit détermine complètement cette ligne fermée et suffit pour fixer sa position à droite en AM plutôt qu'à gauche en AM', en avant plutôt qu'en arrière de l'élément initial (18)? Cet élément pourrait suffire pour déterminer complètement une ligne si celle-ci devait satisfaire à la condition d'être tracée sur une surface, comme un grand cercle sur une sphère; mais il n'en est pas de même quand cette condition n'est pas imposée. En outre,



(16) Voir PGNE, XVII. (17) Votr PGNE, XVI. (18) Voir PGNE, XXIX.

Digitized by Google

on peut faire passer par A des éléments linéaires en nombre infini, dirigés dans tous les sens et déterminant une infinité de droites qui toutes passent par le point A′ opposé à A. De sorte que si l'on s'éloigne de A, dans une direction quelconque, d'une quantité égale au maximum de la distance qui, en géométrie riemannienne, peut séparer deux points quelconques de l'espace, on doit toujours se trouver au même point A′. Quand on dit que tous les chemins conduisent à Rome on ne sous-entend pas qu'il y vont tous en ligne droite. Ici, au contraire, si l'on s'éloigne indéfiniment d'un point quelconque A, dans quelque direction que ce soit, en cheminant en ligne droite, on arrive toujours finalement au point A′ et tous les chemins parcourus pour y aboutir sont égaux. Peut-on imaginer qu'une conception si bizarre soit l'expression de la réalité (19) ?

On ne comprend pas non plus qu'une droite riemannienne puisse être perpendiculaire à un plan riemannien. En effet, si l'on considère autour de A un élément superficiel CDE, en prolongeant indéfiniment tous les éléments rectilignes passant par A dans cette surface infiniment petite, on obtient un plan riemannien qui contient le point A′ opposé à A. Si l'on considère maintenant une perpendiculaire élevée en B sur ce plan, lequel est une surface fermée, elle doit avoir une partie intérieure et une partie extérieure au plan; car après avoir parcouru un certain chemin ABM..., elle doit percer de nouveau le plan au point A′ opposé à A pour revenir finalement au point de départ; mais si l'espace est homogène comme on le suppose dans toutes les démonstrations sur les figures géométriques, le plan est semblable à lui-même tout autour du point A et l'espace au dessus de ce plan est aussi partout semblable à lui-même; de sorte qu'on ne voit pas que la perpendiculaire AB puisse choisir un chemin plutôt qu'un autre pour aller en A′ et que, par conséquent, s'il existe une telle perpendiculaire, il doit y en avoir une infinité(20).

Pour tous ces motifs, nous concluons que l'existence des figures riemanniennes à trois dimensions et, en particulier, celle d'une droite riemannienne perpendiculaire à un plan riemannien, est impossible.

Et cependant la démonstration (21) par laquelle M. Mansion établit, comme application du théorème de Simson-Stewart, qu'une droite perpendiculaire à deux autres qui se croisent à son pied dans un plan riemannien est perpendiculaire à ce plan, ne repose que sur des for-

(19) Voir PGNE, XXX. (20) Voir PGNE, XXXI. (21) Voir PGNE, XXXII.

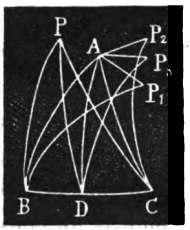
Digitized by Google

mules exactes et sur des calculs exacts également ; mais la conclusion tirée de ces calculs doit être rejetée (et elle devrait l'être alors même que l'on donnerait, comme on peut le faire, une autre forme à la démonstration) parce que l'hypothèse sur laquelle on se fonde doit être rejetée elle-même comme une impossibilité. Les calculs en question sont d'ailleurs susceptibles d'une interprétation géométrique (**) très-simple et entièrement satisfaisante.

Nous allons, en effet, les reprendre en y attachant une autre signification et ils nous donneront alors la démonstration d'un théorème de géométrie euclidienne.

Considérons le triangle sphérique ABC où l'on a mené du sommet A un arc du grand cercle AD, rencontrant le côté BC au point D, situé entre B et C. Soient, sur la même sphère, deux arcs de grands cercles égaux $AP_1 = AP_2$, respectivement perpendiculaires à AB et AC et traçons les arcs de grands cercles BP_1 et CP_2 ; construisons ensuite un triangle BPC dans lequel les côtés BP et CP soient respectivement égaux à BP_1 et CP_2 et tirons PD ; enfin construisons le triangle ADP_3 dans lequel $AP_3 = AP_1 = AP_2$ et $DP_3 = DP$. Je dis que ce triangle est rectangle en A.

En effet, dans le triangle ABC on a, d'après le théorème de trigonométrie sphérique analogue à celui de Simson-Stewart,



$$\cos AD \cdot \cos BC = \cos AB \cdot \sin DC + \cos AC \cdot \sin BD.$$

Le triangle PBC donne la relation analogue

$$\cos PD \cdot \cos BC = \cos PB \cdot \sin DC + \cos PC \cdot \sin BD.$$

Multiplions la première de ces relations par $\cos AP_3 = \cos AP_1 = \cos AP_2$ et retranchons-en ensuite la seconde, en remarquant que dans les triangles rectangles ABP_1 et ACP_2 on a les relations

$$\cos BP_1 \text{ ou } \cos BP = \cos AB \cdot \cos AP_1 \text{ et } \cos CP_2 \text{ ou } \cos CP = \cos AC \cdot \cos AP_2;$$

il viendra, après division par cos BC,

$$\cos AD \cdot \cos AP_3 = \cos PD = \cos DP_3;$$

par conséquent, le triangle ADP_3 est rectangle en A.

On obtient donc ainsi trois triangles sphériques rectangles ayant des hauteurs égales $AP_1 = AP_2 = AP_3$, ayant pour bases respectivement AB,

(**) Voir PGNE, XXXIII.

Digitized by Google

AC, AD et dont les hypoténuses sont respectivement égales à PB, PC, PD; mais il n'est pas possible de les placer de manière à faire coïncider les hauteurs tout en laissant invariables les positions des bases; et c'est cette coïncidence qu'il faudrait pouvoir réaliser pour obtenir la perpendiculaire commune à ces bases que suppose la démonstration de M. Mansion.

En résumé, nous pensons que les figures non euclidiennes à trois dimensions sont impossibles, à moins qu'au lieu de considérer l'espace comme homogène (23) on ne lui attribue des propriétés toutes différentes et qu'il serait peut-être bien difficile de définir. En cela nous sommes d'un avis opposé à celui des mathématiciens qui prétendent que, parce qu'on ne peut pas démontrer le postulatum d'Euclide, ce sont peut-être les figures euclidiennes, aussi bien planes que solides, qui ne peuvent pas être réalisées.

A ce compte nous ne pourrions plus être sûrs de rien, puisqu'il est impossible de *tout* démontrer et que l'on est forcé d'admettre certains postulats sans démonstration; par exemple, si quelqu'un s'avisait de dire qu'il n'est pas certain qu'une droite qui pénètre dans un triangle doit en couper une deuxième fois le périmètre pour en sortir; ou bien encore s'il prétendait qu'il se peut que les figures géométriques ne soient réalisables dans aucun des trois systèmes de géométrie, parce qu'il n'est pas certain qu'une figure dont nous supposons l'existence dans une région déterminée de l'espace puisse exister aussi dans toute autre région, on ne pourrait lui répondre qu'en invoquant le sentiment de l'évidence (24); or, c'est ce sentiment qui nous fait aussi admettre les deux postulats (25) qui distinguent la géométrie euclidienne des deux autres; et ce sentiment persiste en nous, fortifié plutôt qu'affaibli, après une étude attentive des théorèmes de la planimétrie non euclidienne. Cette étude nous montre que tous les théorèmes dont il s'agit sont susceptibles d'une interprétation très simple quand on admet les propositions suivantes que les géomètres non euclidiens ne veulent pas accepter : le plan, en géométrie lobatchefskienne, est une pseudosphère et, en géométrie riemannienne, c'est une sphère (26). Si, comme les non euclidiens, on rejette ces propositions, les notions de droite et de plan deviennent incompréhensibles et l'on est conduit à des conséquences qui semblent contraires à toute conception rationnelle (27) des figures géométriques et qui démon-

(23) Voir PGNE, XXXIV. (24) Voir PGNE, XXXIV. (25) Voir PGNE, XXII. (26) Voir PGNE, XX. (27) Voir PGNE, XIX.

Digitized by Google

trent indirectement la vérité des deux postulats fondamentaux de la géométrie euclidienne.

Pour terminer, faisons observer que les moyens proposés par les non euclidiens pour vérifier expérimentalement quel est le vrai système de géométrie sont complètement illusoires. L'un de ces moyens consisterait à *déterminer la forme de la ligne droite*(*). Mais pour déterminer une ligne et, par conséquent, parvenir à la connaissance de sa forme, on doit la rapporter à des lignes droites(38). Comment donc pourrait-on déterminer la forme d'une ligne quelconque et en particulier celle d'une ligne droite, si celle-ci nous était elle-même inconnue ?

Un autre moyen consisterait à s'assurer par des mesures, quel est celui des trois systèmes de géométrie dont les formules trigonométriques sont vérifiées. Or, la première condition pour pouvoir mesurer les côtés d'un triangle est de posséder une unité de longueur bien définie et de pouvoir tracer les côtés du triangle pour y appliquer cette unité de longueur. On se demande comment on pourrait s'assurer qu'un triangle est rectiligne et que l'unité de longueur est droite et bien divisée alors qu'il peut même y avoir doute sur la forme de la ligne droite. Voici comment M. Mansion s'exprime à propos de la mesure d'une distance : « Nous « disons que deux points sont à telle ou telle distance quand nous pouvons « porter entre ces points une règle divisée, supposée elle-même invaria- « ble, un nombre minimum de fois »(**). Mais on ne pourra pas savoir si cette règle est droite et bien divisée puisqu'on ignore la forme d'une ligne droite. M. Mansion fait observer, il est vrai, qu'un fil tendu donne l'image de la ligne droite et la surface d'une eau dormante celle du plan(***). Mais nous pensons qu'un mathématicien qui, avec raison, vise à la rigueur et qui n'admet pas qu'on puisse connaître par intuition la forme d'une ligne droite et celle d'un plan, ne saurait considérer ces images comme susceptibles de nous en donner, à défaut de tout autre moyen, une idée exacte. Car il sait trop bien qu'un fil tendu

---

(*) De Tilly : *Essai de Géométrie analytique générale*, *p.* 38.

(38) Voir PGNE, XXXV.

(**) P. Mansion : *Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale*, p. 42.

(***) P. Mansion : *Premiers principes de la Métagéométrie*, p. 34, et *Mathesis*, janvier 1896, p. 13.

Digitized by Google

n'est pas droit et que la surface d'une eau dormante n'est pas plane(29).

Concluons donc que si, par impossible, les postulats sur lesquels repose la géométrie euclidienne n'étaient pas vrais, nous n'aurions aucun moyen expérimental de nous en assurer(30).

Mais, selon nous, il n'en est pas ainsi. Pour établir les bases de la science de l'étendue nous devons forcément faire une certaine part à l'intuition; en voulant, sous prétexte de rigueur, trop restreindre cette part, on en vient fatalement à obscurcir les premières notions. La ligne droite et le plan sont des abstractions qui n'existent que dans notre entendement, bien que l'idée nous en soit suggérée par les objets matériels qui nous entourent. Nous avons expliqué plus haut comment, par intuition, nous saisissons quelles en sont les formes et les propriétés fondamentales; et c'est sur ces propriétés que repose la géométrie d'Euclide dont les propositions, si claires, servent de bases à tant d'applications utiles et nous permettent d'obtenir des représentations matérielles des figures géométriques; elles nous permettent de construire, du moins approximativement, toutes les figures de la géométrie euclidienne et nous font concevoir en même temps la possibilité de réaliser les figures des deux *planimétries* non euclidiennes parce que celles-ci rentrent, comme cas particuliers, dans la géométrie euclidienne.

Quant aux propositions de la *stéréométrie* non euclidienne nous sommes loin de prétendre qu'il soit impossible d'y attacher un sens raisonnable(31). Il en est de ceci comme de l'espace à n dimensions(32) dont les analystes ont établi les formules en y adaptant une terminologie analogue à celle de la géométrie analytique, bien que l'espace réel n'ait que trois dimensions. On connaît déjà des applications de ces formules et on trouvera sans doute beaucoup d'autres. De même, les formules de la géométrie non euclidienne peuvent être d'un puissant secours en analyse et, comme l'a fait remarquer notre savant collègue, Lobatchefsky a pu trouver des intégrales définies nouvelles en se fondant sur la géométrie non euclidienne solide; mais cela ne prouve pas que ces solides existent, pas plus que les formules de l'espace à n dimensions ne prouvent que l'espace réel peut en avoir plus de trois. Il ne faut pas oublier que nos formules peuvent bien, quand elles sont exactes et quelle que soit la

(29) Voir PGNE, XXXVI. (30) Voir PGNE, XIV. (31) Voir PGNE, XVIII. (32) Voir PGNE, XXXVII.

Digitized by Google

manière dont elles ont été établies, s'appliquer aux choses existantes; mais qu'elles ne peuvent ni créer ces choses, ni les modifier, ni même prouver, par elles-mêmes, que ces choses existent. Il ne suffit donc pas d'invoquer des formules algébriques réelles pour démontrer la réalité des figures non euclidiennes qui les ont fait trouver. Ne démontre-t-on pas, à l'aide des imaginaires, des formules rigoureuses, ne contenant que des grandeurs réelles?

Toutefois, comme nous le rappelons plus haut, tous les théorèmes de la planimétrie non euclidienne sont déjà expliqués et on parviendra peut-être à expliquer aussi ceux de la stéréométrie; nous venons même de donner un exemple d'interprétation d'un théorème de stéréométrie riemannienne et nous pensons que, comme dans ce cas particulier très simple, toute saine interprétation des propositions de la géométrie non euclidienne à trois dimensions, devra toujours reposer les principes de la géométrie euclidienne.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que nous considérons l'étude de la géométrie non euclidienne comme indispensable à ceux qui veulent connaître à fond les bases de la science des figures. Nous avons toujours signalé, dans notre enseignement, la facilité avec laquelle la connaissance des théorèmes de Lobatchefsky fait découvrir les postulats cachés dans les prétendues démonstrations du postulatum d'Euclide et nous sommes les premiers à rendre hommage au génie du grand géomètre qui a réussi à démontrer, par une admirable synthèse, mais sous un autre nom, les principales propriétés des lignes géodésiques des surfaces pseudosphériques (**22**).

SUR LES GROUPES POLAIRES DES SYSTÈMES DE POINTS;

par M. Stuyvaert (Gand).

1. Soit, sur une droite, un système (P) de n points $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$. Le premier système polaire (R) d'un point O de la droite est un groupe de $n-1$ points R dont chacun satisfait à la relation

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OP_i}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OP_j}\right)\cdots=0,$$

le nombre des parenthèses étant $n-1$; et réciproquement, tout point

---

(**22**) Voir PGNE, XXXVIII.

Digitized by Google

R qui satisfait à cette relation appartient au premier système polaire de O; donc l'égalité précédente, si l'on y regarde $\frac{1}{OR}$ comme inconnue, a pour racines les inverses des distances OR_i. Le terme en $\left(\frac{1}{OR}\right)^{n-1}$ a pour coefficient $C_{n,1} = n$, et le terme tout connu est

$$(-1)^{n-1} \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-1 \text{ facteurs}).$$

Donc on a

$$n \times \frac{1}{OR_1 \,.\, OR_2 \,.\, OR_3 \ldots OR_{n-1}} = \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-1 \text{ facteurs}).$$

On trouvera de même, pour le système polaire (ρ) d'ordre k du point O,

$$C_{n,k} \frac{1}{O\rho_1 \,.\, O\rho_2 \,.\, \ldots \, O\rho_{n-k}} = \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-k \text{ facteurs}).$$

2. D'après ce qui précède, un groupe (P) de n points est déterminé quand on se donne un de ces points, ainsi que le premier système polaire d'un point donné O.

En effet, les données déterminent les groupes polaires successifs de O par rapport à (R); or ceux-ci coïncident avec les groupes polaires, d'ordre 2 à $n-1$, du point O relativement au système cherché P; donc ils déterminent, d'après la dernière égalité, les divers coefficients de l'équation ayant pour racines les valeurs de $\frac{1}{OP}$, à l'exception du terme tout connu de cette équation. Mais ce dernier terme est déterminé par le fait que l'une des racines de l'équation est donnée.

Plus généralement, si l'on donne k points du groupe inconnu (P) et le système polaire, d'ordre $n-k$, de O par rapport à (P), ce groupe (P) est déterminé (sauf dans des cas exceptionnels).

Analytiquement, si le groupe (P) est représenté par une forme, les groupes polaires le sont par des formes dérivées successives, et, pour remonter des dernières à la première, il faut une série d'intégrations, dont chacune introduit une constante arbitraire; ces constantes seront déterminées en général, si l'on donne un nombre égal de points-racines du groupe (P).

3. Théorème. — *Si, sur* $n+1$ *droites issues d'un point* O, *on a des groupes de* n *points* P, *et si les premiers systèmes polaires* R *de* O *par rap-*

Digitized by Google

port à tous ces groupes sont sur une même courbe d'ordre $n-1$, *les* $n+1$ *groupes de points* P *sont sur une même courbe d'ordre* n.

En effet, prenons, sur les deux premières droites, n points P, sur la troisième $n-1$ points, sur la quatrième $n-2$ points, et ainsi de suite jusqu'à la dernière droite sur laquelle on considère un seul point; en tout $\frac{n(n+1)}{2}+n$ ou $\frac{n(n+3)}{2}$ points qui déterminent une courbe (C) d'ordre n.

La droite polaire de O par rapport à la courbe (C) passe par les points polaires de O relativement aux deux premiers groupes de points P, donc aussi par le point analogue sur la troisième droite, car ces trois points sont sur une même droite, polaire de O relativement à la courbe des R; mais alors (C) passe par le dernier point du troisième groupe, car on ne peut compléter de deux façons différentes un groupe de n points dont un seul est inconnu, quand le point polaire de O est donné.

Ensuite, la conique polaire de O relativement à (C) passe par les trois couples polaires de O relatifs aux trois premiers groupes de points P, donc aussi par le couple polaire de O relatif au quatrième groupe, car on a là huit points situés sur une même conique, polaire de O par rapport à la courbe des R. Donc (C) doit passer par les deux points qui complètent le quatrième groupe P, puisque l'on ne peut compléter de deux manières un groupe de n points dont deux sont inconnus, quand le couple polaire de O est donné.

Le même raisonnement se poursuit de proche en proche.

4. Cas particuliers. — I. On joint un point O aux sommets A, B, C d'un triangle par des droites qui rencontrent les côtés opposés respectivement en A_1, B_1, C_1. Les côtés du triangle forment un système du troisième ordre; si la droite polaire de O par rapport à ce système rencontre OA, OB, OC en M, N, P, on a

$$\frac{2}{OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{3}{OM}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{2}{\frac{2}{3}OM},$$

et deux autres relations semblables. Donc si A_2, B_2, C_2 sont les milieux de OA, OB, OC, les conjugués harmoniques de O sur A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont en ligne droite (aux $\frac{2}{3}$ de OM, ON, OP); donc *les six points* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *sont sur une conique.*

Si O est l'orthocentre, cette conique est le cercle des neuf points;

Digitized by Google

si O est le barycentre, c'est l'ellipse passant par les milieux des côtés et ayant pour centre O, etc.

II. Une conique touche les côtés BC, OB, OC d'un triangle respectivement en D, E, F; OD coupe encore la conique en G; en considérant la courbe et sa tangente BC comme un système du troisième ordre, on démontre, comme ci-dessus, que B, G, C et les milieux de OD, OE, OF sont sur une même conique.

Les deux propriétés précédentes peuvent être généralisées par projection.

III. Si l'on a deux points A, B, et si l'on veut trouver un terne AAX, ayant un point double en A, et tel que A, B soit le couple polaire d'un point O de la droite par rapport à AAX, on doit avoir

$$\frac{3}{OA \cdot OB} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{2}{OA \cdot OX} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{OX} = \frac{1}{\frac{1}{3}OB} - \frac{1}{OA}$$

X est le conjugué harmonique de O sur A'B', A' étant symétrique de A par rapport à O et OB' étant le tiers de OB.

Si l'on fait cette construction sur quatre droites issues d'un point O, et rencontrant une conique en quatre points A et quatre points B, il existe une cubique touchant ces quatre droites aux points A et les coupant ensuite aux points X.

On pourrait imaginer encore d'autres cas particuliers.

×PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

par M. A. Boutin.

I. *Trouver 47 entiers positifs en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème est :

$$x^2 + (x+r)^2 + (x+2r)^2 + \cdots + (x+46r)^2 = k^2,$$

ou bien, en posant $k = 47k'$,

$$x^2 + 2.23rx + 23.31r^2 - 47k'^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = y - 23r,$$

avec
$$47k'^2 - 46z^2 = y^2, \tag{1}$$

où
$$z = 2r. \tag{2}$$

L'équation (1) est complètement résolue par les formules :

$$k' = 46(a-b)^2 + a^2, \quad z = 47(a-b)^2 - b^2, \quad y = 46b^2 - 47a^2,$$

Digitized by Google

où a et b sont des entiers indéterminés; toutefois, à cause de (2) il faut prendre a pair.

Le problème a donc une infinité de solutions. Ainsi $a = 8$, $b = 7$ donnent

$$731^2 + 732^2 + 733^2 + \cdots + 777^2 = 5170^2;$$

De même, $a = 6$, $b = 5$ donnent

$$289^2 + 300^2 + 311^2 + \cdots 795^2 = 3854^2$$

II. *Trouver* 59 *entiers positifs en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème est

$$x^2 + (x+r)^2 + \cdots + (x+58r)^2 = 59^2k^2$$

qui se ramène à

$$59k^2 = y^2 + 290r^2 \qquad (3)$$

où

$$x = y - 29r.$$

L'équation (3) admet les solutions :

$$r = 1, \quad y = 51, \quad k = 7 \quad \text{d'où} \quad x = 22,$$
$$r = 1, \quad y = 67, \quad k = 9 \quad \text{d'où} \quad x = 38,$$

qui donnent

$$22^2 + 23^2 + 24^2 + \cdots + 80^2 = 413^2,$$
$$38^2 + 39^2 + 40^2 + \cdots + 96^2 = 531^2.$$

Connaissant une solution de (3), il est aisé d'avoir les formules générales qui résolvent cette équation.

Le problème proposé a donc une infinité de solutions.

III. *Trouver* 107 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème :

$$x^2 + (x+r)^2 + (x+2r)^2 + \cdots + (x+106r)^2 = 107^2k^2$$

se ramène à

$$107k'^2 = y^2 + 106r^2 \qquad (4)$$

où

$$k = 3k' \quad \text{et} \quad x = 3y - 53r.$$

L'équation (4) est complètement résolue par les formules :

$$r = 107b^2 - (a - b)^2, \quad y = 106(a-b)^2 - 107a^2, \quad k' = a^2 + 106b^2.$$

Le problème a donc une infinité de solutions.

Exemple : $b = 3$, $a = 34$, donnent :

$$r = 2, \quad y = 21826, \quad k' = 2110;$$

divisant ces nombres par 2, on a :

$$32\,686^2 + 32\,687^2 + 32\,688^2 + \cdots + 32\,792^2 = 338\,655^2.$$

Digitized by Google

IV. *On ne peut trouver* 55, 71, 83 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

Le problème général qui consiste à trouver n entiers en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré, n'est possible jusqu'à $n = 47$, que pour les nombres : 4, 9, 11, 16, 23, 24, 25, 26, 33, 36, 47. (Voir JME., années 1894, 1895, *Exercices divers*, nos 302 à 308, 369 à 372, 396).

J'ai démontré que le problème est toujours possible quand n est un carré; mais c'est là la seule proposition générale que j'aie trouvée. Il serait intéressant de connaître, à priori, pour quelles valeurs de n le problème est possible. On peut remarquer que jusqu'à 55, le problème est impossible quand n est un triangulaire, sauf, 36 qui est en même temps un carré.

×DEUX NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU POSTULATUM D'EUCLIDE.

1. Soit t la valeur, en angle droit, de l'angle d'un triangle équilatéral dont le côté est égal à 1 mètre. Si t n'est pas égal à 2/3, 1 mètre, quantité concrète, est déterminé par la quantité abstraite t, *ce qui est absurde*; donc $t = \frac{2}{3}$ (*Démonstration* de M. G. Tarry).

Cette démonstration n'est au fond qu'une variante de la démonstration analytique de Legendre (*Éléments*, note II). En réalité, il existe entre t et le *rapport* de 1 mètre à la constante lobatchefskienne l, la relation parfaitement légitime

$$1 = 2\mathrm{Ch}\frac{1}{2l}\sin\frac{t}{2},$$

où n'entrent que des nombres abstraits. Si t était connu, on pourrait déterminer l, voilà tout.

Si l'on n'exclut pas à priori la géométrie riemannienne, on aurait

$$1 = 2\cos\frac{1}{2r}\sin\frac{t}{2},$$

r étant la constante riemannienne.

2. M. Wickersheimer a publié (JMS., oct. 1897, p. 20-24) un *Essai de démonstration du postulatum d'Euclide*, où il s'appuie inconsciemment sur un postulatum beaucoup plus compliqué et d'ailleurs indémontrable : *Deux perpendiculaires* AB, CD, *à deux autres droites* BE, CE, *perpendiculaires entre elles se rencontrent toujours.* (P. M.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 909.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 55).

Soit ABCD *un trapèze dont la diagonale* AC *égale la base* AB. *On projette* D *en* E *sur* BC ; *la perpendiculaire élevée au milieu de* BE *rencontre* AC *au point* G ; *la parallèle à* BC *menée par* G *coupe en* H *la droite qui unit les milieux des bases* AB, CD. *Démontrer que* HG = BE. (A.C.).

Solution par MM. Poort (Groningue), François (La Haye), J. Jonesco, Déprez, Cristesco, Laurens. Soient M, N, P, Q les milieux des droites AB, DC, BC, BE; GH rencontre AB en un point R, et la parallèle à BC par N coupe AB en un point S. Cela posé, démontrons d'abord que GR = EC. On a BP = $\frac{1}{2}$ BC, BQ = $\frac{1}{2}$ BE ; d'où, par soustraction : PQ = $\frac{1}{2}$ CE. Comme AP passe au milieu de GR, on a aussi PQ = $\frac{1}{2}$ RG. Il en résulte CE = RG.

Ensuite, le triangle DEC étant rectangle en E, on a DN = NC = NE ; donc le triangle NEC est isoscèle et, par suite, équiangle à ARG, et même égal à ARG, à cause de RG = CE. On en conclut AR = NC = SB, MR = SM. Les triangles RMH, SMN sont donc égaux, et l'on a RH = NS = CB.

M Déprez accompagne sa solution de plusieurs remarques intéressantes sur les lieux décrits par les points H et G lorsque la base AB est fixe et l'angle BAD constant; il considère aussi les enveloppes des droites GH, etc. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de reproduire ces développements.

Question 1014.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 104).

Soit ABCD *un quadrilatère articulé dans lequel* AB + BC = AD + DC. *Appelons* E *l'ellipse qui a pour foyers les points* A, C *et qui passe par* B *et* D. *Si l'on fixe les sommets* A *et* B *et qu'on déforme ensuite le quadrilatère, les directrices de* E *enveloppent deux coniques ayant pour foyer commun le point* B ; *l'ellipse* E *a pour enveloppe une ellipse qui a pour foyers les points* A *et* B. (J. Neuberg).

Solution par M. Collette. Le point C se meut sur une circonférence de centre B. Si P désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur

Digitized by Google

la directrice qui correspond au foyer C, on a, d'après une propriété bien connue de l'ellipse,

$$BP : BC = AC : (AB + BC);$$

il en résulte que, pendant la déformation, BP, qui est parallèle à AC, est aussi proportionnelle à AC, de sorte que les points P et C décrivent des courbes semblables; le lieu du point P est donc une circonférence, et comme P décrit la podaire de B par rapport à l'enveloppe de la directrice, cette enveloppe est une conique de foyer B.

On trouve d'une manière analogue l'enveloppe de l'autre directrice.

Pour déterminer l'enveloppe de l'ellipse E, considérons une ellipse E′ infiniment voisine de E et correspondant au foyer C′ infiniment voisin de C. Pour qu'un point O appartienne aux deux ellipses, il faut que l'on ait la relation

$$AO + OC = AO + OC', \quad \text{d'où } OC = OC'.$$

Le point O se trouve donc sur la perpendiculaire élevée au milieu de CC′; si l'on fait tendre C′ vers C, le point caractéristique ω de l'ellipse E est, par suite, situé sur la droite BC, et l'on a

$$\omega A + \omega B = \omega A + \omega C + CB = AB + 2BC,$$

quantité constante. Le lieu de ω est par conséquent une ellipse dont A et B sont les foyers.

Remarque. Le lieu du centre de courbure de l'ellipse variable E au point fixe B est une ligne droite. En effet, le point Q où la bissectrice de l'angle ABC rencontre l'axe AC, divise AC dans le rapport constant AB : BC; or A est fixe et C décrit une circonférence de centre B; donc le lieu de Q est une circonférence dont le centre est sur AB. Comme le point B fait d'ailleurs partie de ce lieu, la perpendiculaire élevée en Q sur la droite QB rencontre AB en un point fixe H. Par conséquent, en vertu de la construction bien connue du centre de courbure, celui-ci se trouve sur la perpendiculaire menée par H sur la droite AB.

Ont résolu la même question : MM. Droz Farny et Buysens.

×Question 1019.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 128).

Trouver les nombres qui, multipliés par 9, *donnent pour produits les mêmes nombres renversés.* (J. Jonesco.)

Solution d'après MM. Barbette, François, Droz Farny et Mandart.

Soient $N = abc \ldots ikl$, $N' = lki \ldots cba$

Digitized by Google

le nombre cherché et ce nombre renversé. La relation $N' = 9N$ exige $a = 1$, $b = 0$ ou 1 sans quoi 9N aurait plus de chiffres que N. L'hypothèse $b = 1$ est exclue ; car si N commençait à gauche par 11, 9N commencerait à gauche par 99 (le produit partiel $9c$ ne pouvant donner de retenue sans augmenter le nombre de chiffres de 9N); on aurait alors $l = 9$, $k = 9$, de sorte que 9N se terminerait à droite par 91 au lieu de 11.

D'après cela, on peut écrire

$$N = 10c \ldots k9.$$

On voit facilement que N a au moins 4 chiffres. De plus, N' étant divisible par 9, la somme des chiffres l'est également. Donc si l'on suppose $N = 10c9$, on a nécessairement $c = 8$. Ainsi, le plus petit nombre de l'espèce cherchée est 1089.

Si N a plus de 4 chiffres, on a encore $k = 9$; car la somme $9k + 8$ doit se terminer par zéro, ou $9k$ par 2, donc $9k = 72$, $k = 8$. Supposons $N = 10c89$; alors comme N est un multiple de 9, on a $c = 0$ ou $c = 9$; la première hypothèse ne convient pas, mais la seconde satisfait à la question.

Soit $N = 10cd89$; l'égalité

$$10cd89 \times 9 = 98dc01$$

montre que le produit partiel $9c$ donne pour retenue 8, d'où l'on conclut $c = 9$; mais le nombre $d \times 9 + 8$ doit se terminer par c, donc $d \times 9$ par 1. Il en résulte $d = 9$, et on vérifie aisément que le nombre 109989 satisfait au problème.

Cette vérification suggère immédiatement une première solution de la forme 1099 .. 989, les chiffres compris entre 10 et 89 étant des 9.

Soient maintenant N_n, $N_{n'}$, $N_{n''}$... des nombres de cette forme et composés respectivement de $n, n', n'', \ldots$ chiffres. Tout nombre de la forme

$$N_n N_{n'} N_{n''} \ldots N_{n''} N_{n'} N_n,$$

(on suppose les nombres N_n, $N_{n'}, \ldots$ remplacés par leur expression en chiffres) constitue encore une solution. — On pourrait remplacer $N_{n'}$, $N_{n''}$ ... par un nombre quelconque de zéros. Exemples :

1089, 10891089, 1089000 1089,
108900 109890 1098900 1089, etc.

M. Barbette a traité la même question dans un système quelconque de numération. Il fait remarquer que N est divisible par 9 et par 11 (si la base est 10).

Digitized by Google

Question 1097.

(Voir *Mathesis*, 2, VI, p. 280).

Un mobile A *parcourt une droite fixe* Δ. *On le vise au moyen d'un théodolite bien réglé. La lunette de longueur* 2*a est mobile autour de son milieu, dans un cercle vertical situé à une distance d de l'axe vertical de l'instrument. On demande la courbe décrite dans l'espace par le centre de l'objectif. Cas particuliers et vérifications diverses.* (H. Brocard).

Solution par M. Soons. Prenons pour axe Ox la perpendiculaire commune à Δ et à l'axe de l'instrument, pour Oz l'axe de l'instrument, les axes étant rectangulaires. Soient b la distance de Δ et Oz, A l'angle de Δ avec Oz, α l'angle que fait avec Ox la perpendiculaire abaissée de O sur le plan du cercle vertical. Ce plan a pour équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = d. \tag{1}$$

Les équations de Δ sont

$$x = b, \quad y = z\operatorname{tg} A;$$

et celle du plan passant par Δ et le point milieu de la lunette :

$$\frac{x-b}{d\cos\alpha - b} = \frac{y - z\operatorname{tg} A}{d\sin\alpha}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) déterminent la position de l'axe de la lunette ; en éliminant α on obtient la surface engendrée par l'axe de la lunette.

De (1) et (2) tirons $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis substituons dans

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

ce qui donne

$$\left.\begin{vmatrix} x & d \\ d(y - z\operatorname{tg} A), & b(y - z\operatorname{tg} A) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ b(y - z\operatorname{tg} A), & d(b - x) \end{vmatrix}^2\right\} = \begin{vmatrix} x & y \\ d(y - z\operatorname{tg} A), & d(b - x) \end{vmatrix}^2 \tag{3}$$

Cette équation jointe à

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2, \tag{4}$$

représente le lieu du centre de l'objectif. En combinant les égalités (3) et (4) on obtient la suivante :

$$\begin{aligned}&(b - x)^2(d^2z^2 - d^2a^2 - d^2y^2 + 2d^2yz\operatorname{tg} A)\\ &+ (y - z\operatorname{tg} A)^2[(b^2 - d^2)y^2 + b^2x^2 - 2bd^2x + d^4] = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Digitized by Google

Cas particuliers. I. Si l'on a $d = 0$ les équations (4) et (5) deviennent

$$y = z \operatorname{tg} A, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

le centre de l'objectif décrit la circonférence déterminée par le plan passant par Δ et O, sur la sphère de centre O et de rayon a.

II. Si $b = d$, on a

$$x = b \quad \text{ou} \quad z = \pm a \cos A, \quad x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2.$$

Le résultat $x = b$ convient si l'on suppose la lunette immobile, son axe coïncidant avec Δ.

L'hypothèse $z = \pm a \cos A$ convient au cas où le milieu de la lunette n'est pas sur Δ. En effet, le rayon visuel et Δ se projettent suivant des tangentes à une même circonférence, les projections se coupent sur la projection du mobile; on a donc deux triangles égaux et l'axe de la lunette fait avec Oz, un angle constant et égal à A.

III. $A = 90$, $\operatorname{tg} A = \infty$. En faisant la substitution après avoir divisé par $\operatorname{tg}^2 A$, on obtient $z = 0$.

×Question 1197.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 175).

Eliminer x entre les équations

$$\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} = \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3}. \qquad \text{(J. Neuberg).}$$

Solution par M. J. Degueldre. Représentons par m la valeur commune de ces rapports; nous aurons

$$\begin{aligned} -a_1x + c_1mx + d_1m &= b_1, \\ -a_2x + c_2mx + d_2m &= b_2, \\ -a_3x + c_3mx + d_3m &= b_3. \end{aligned}$$

Considérons ces équations comme formant un système de trois équations dont les inconnues sont respectivement x, mx et m; on en tire,

$$x = -\frac{|\,b, c, d\,|}{|\,a, c, d\,|}, \quad m = -\frac{|\,a, b, c\,|}{|\,a, c, d\,|}, \quad mx = \frac{|\,a, b, d\,|}{|\,a, c, d\,|}.$$

L'élimination de x et m entre ces dernières égalités conduit donc à la condition

$$|\,a, b, d \parallel a, c, d\,| = |\,a, b, c \parallel b, c, d\,|.$$

La même question a été résolue par M. Colart.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1151. Trouver deux cubes entiers consécutifs dont la différence soit un nombre triangulaire. Démontrer que la différence de deux cubes entiers consécutifs de même parité n'est jamais un nombre triangulaire. (DE ROCQUIGNY.)

1152. Démontrer que l'équation

$$12x^5 - 7x^4 + x^2 - 3000 = 0$$

n'admet qu'une seule racine réelle positive. Trouver cette racine avec six décimales exactes. (H. BROCARD.)

1153. Démontrer que pour $x = 0$, on a

$$\lim \frac{\text{tang}\,(\sin x) - \sin(\text{tang}\, x) - \frac{1}{30}x^7}{x^9} = \frac{29}{756}$$

(Emprunté à CAYLEY, *Math. Pap.*, 1897, t. XII, n° 842, ou *Mess. of Math.*, 1885, IV, 191-192).

1154. Soit ABC un triangle inscrit dans une conique Σ. Représentons par α le point de Frégier de A (point de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits à Σ et ayant le sommet de l'angle droit en A), par α' le pôle de BC.

1° Les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ concourent en un point P.

2° La conique Σ est la transformée isogonale (par points inverses) de la polaire de P. (DROZ FARNY).

1155. On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC d'un triangle et sont normales au troisième BC. Chercher 1° l'enveloppe de la directrice; 2° les enveloppes des cordes joignant les points de contact de AB et AC ou joignant ces points au point d'incidence de BC; 3° le lieu du foyer. (J. NEUBERG).

1156. On considère dans un cercle de centre O, un rayon fixe OA et un rayon mobile OM.

1° Le lieu du centre S des symédianes du triangle OAM est une ellipse;

2° Il existe, outre le point S, trois autres points du plan du triangle OAM, tels que leurs distances aux côtés de ce triangle sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés. Le lieu de ces points se compose d'une hyperbole équilatère et de deux lignes droites. (E. N. BARISIEN.)

Digitized by Google

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. *Choix de Problèmes d'Algèbre et d'exercices de calcul algébrique*, avec les solutions, à l'usage des Athénées, des Collèges et des Écoles normales, des Candidats aux Écoles spéciales, des Universités et à l'École militaire, par BAUGARD. Namur, A. Wesmael, 1897 (279 p. gr. in-12). Prix : 2 fr. 50.

L'ouvrage contient 896 questions. Dans le chapitre XVIII, il y a des solutions reposant sur un emploi abusif de séries divergentes.

2. *Handboek der Rekenkunde*, door J. VERSLUYS. Derde Deel. Amsterdam, 1897, A. Versluys (142 p. in-8°). Prix : 1 florin 25.

Traité spécialement destiné aux aspirants au diplôme d'instituteur en chef. Beaucoup d'exercices sont empruntés aux examens pour ce grade. Le Traité d'Arithmétique de Tannery a été largement mis à contribution. La divisibilité des nombres est exposée avec des développements intéressants.

3. *Notes de Bibliographie des Courbes géométriques*, par H. BROCARD, Bar-le-Duc, Comte-Jacquet (Autographie de 20-296, XXX pages in-8°).

Ces Notes, tirées à un petit nombre d'exemplaires, sont en quelque sorte l'esquisse d'un répertoire complet des courbes remarquables. L'auteur les a autographiées pour les communiquer aux personnes qui s'intéressent à la question et voudraient bien lui envoyer leurs observations critiques ou des renseignements complémentaires.

Le travail définitif de M. Brocard rendra de grands services aux professeurs de mathématiques; mais, même sous sa forme actuelle, il sera très utile à tous ceux qui s'intéressent aux spéculations géométriques.

×QUESTION D'EXAMEN.

821. On donne trois points fixes A, B, C en ligne droite; on considère une circonférence variable passant par les points B et C; on mène par A les deux tangentes AT, AT′ et la corde des contacts. On demande :

1° les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ATT′;

2° le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle;

3° les lieux des points d'intersection de la tangente AT avec les tangentes parallèles à la droite ABC.

1° Soient M, M′, N, les milieux de AT, AT′, TT′. M et M′ décrivent la circonférence tracée du centre A avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{AB.AC}$. Soient O le centre du cercle TBT′C et P le point où TT′ coupe BC; comme BC est divisée harmoniquement par A et P, P est fixe, et le lieu de N est la circonférence de diamètre AP.

2° Le centre du cercle ATT′ est le milieu de AO, etc.

3° Supposons qu'une tangente parallèle à BC touche le cercle TBC en D et rencontre la tangente AT en I. On a :

IA — ID = AT, donc I décrit une parabole qui a pour foyer A et pour directrice une perpendiculaire à BC et distante du milieu de BC de la quantité $\sqrt{AB.AC}$.

Digitized by Google

POUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

par M. P. MANSION, professeur à l'Université de Gand.

L'article de M. Dauge publié en tête de la livraison de janvier est, en réalité, un essai de réduction de la géométrie non euclidienne plane à la géométrie euclidienne sur certaines surfaces, en même temps qu'une tentative pour établir que la géométrie non euclidienne solide ne peut correspondre à aucune réalité.

Nous croyons avoir répondu d'avance aux objections de notre savant collègue, dans différents articles publiés depuis quelques années dans *Mathesis*. Mais il n'est pas inutile de reproduire ici nos arguments en les appropriant plus spécialement aux considérations que fait valoir M. Dauge pour défendre une thèse opposée à la nôtre.

Pour cela, nous donnons d'abord un aperçu d'ensemble des premiers principes de la géométrie non euclidienne en renvoyant pour les démonstrations à nos écrits antérieurs; puis des notes sur des points spéciaux abordés par notre contradicteur.

I. Exposé général des principes de la géométrie non euclidienne.

I. *Définitions générales de la droite et du plan.* LA DROITE *est une ligne illimitée ou indéfinie homogène déterminée par deux de ses points suffisamment rapprochés.*

LE PLAN *est une surface illimitée ou indéfinie dans laquelle, prenant deux points à volonté et les joignant par une ligne droite, cette ligne est toute entière dans le plan.*

Ces définitions sont des définitions du *genre* droite et du *genre* plan et sont dites à cause de cela, *définitions* GÉNÉRALES. Plus bas, nous distinguerons trois *espèces* de droites et de plans.

Ainsi, dans la théorie habituelle des coniques, on définit le GENRE *conique* comme il suit : *Une conique est le lieu des points dont les distances à un point fixe appelé foyer et à une droite fixe, appelée directrice, sont dans un rapport constant k.* On distingue ensuite trois *espèces* de coniques.

II. *Sens du mot illimité ou indéfini.* Dans la définition générale de la droite et du plan, nous employons, avec Riemann,(*) le mot *illimité* ou

(*) L'observation, dit en substance ce grand géomètre, nous apprend que l'espace réel est, non pas infini, mais illimité.

Digitized by Google

indéfini dans son sens étymologique : *illimité = qui n'a pas d'extrémité, de limite ou de borne.* Ainsi, une circonférence, une sphère sont illimitées ou indéfinies, parce que l'on n'y rencontre pas d'extrémité, de limite ou de bornes.

III. *Les soi-disant postulats.* La définition générale de la droite et du plan permet d'établir une grande partie de la géométrie élémentaire ; mais, arrivé à un certain point, on est forcé de particulariser ces définitions, ou de diviser les genres droite et plan, au moyen des deux propositions suivantes, appelées *improprement* postulats :

POSTULAT DES DEUX DROITES. *Deux droites ne peuvent enclore un espace.*

POSTULAT DES TROIS DROITES. *Deux droites d'un plan qui font, d'un même côté, avec une troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté.*

On prouve que l'on *doit* nécessairement admettre, soit le premier, soit le second, soit enfin le premier et le second de ces postulats.

De même, dans la théorie des coniques, on est forcé, pour établir certaines propriétés, de supposer que le rapport k est supérieur, égal ou inférieur à l'unité.

IV. *Les trois espèces de droites et de plans.* La droite *euclidienne* est celle qui jouit des deux propriétés exprimées par les (soi-disant) postulats ; la droite *lobatchefskienne*, celle qui ne jouit que de la première ; la droite *riemannienne*, celle qui ne jouit que de la seconde. Un plan est *euclidien*, *lobatchefskien* ou *riemannien* selon que les droites qu'il contient sont euclidiennes, lobatchefskiennes ou riemanniennes.

De même, dans la théorie des coniques, la parabole est la conique où $k = 1$, l'hyperbole celle où l'on a $k > 1$, l'ellipse celle où l'on a $k < 1$.

V. *Les trois géométries.* En *géométrie euclidienne*, on ne considère que des droites euclidiennes et des figures dont la définition dépend de celle de la droite euclidienne ; de même la *géométrie lobatchefskienne* et la *géométrie riemannienne* étudient respectivement des droites de même nom et des figures qui en dépendent.

VI. *Les soi-disant postulats sont des définitions.* Le postulat des deux droites *seul* caractérise la droite lobatchefskienne.

Le postulat des trois droites *seul* caractérise la droite riemannienne.

Réunis, ces deux postulats caractérisent la droite euclidienne.

Ces soi-disant postulats sont donc au fond des définitions (ou plutôt

Digitized by Google

des compléments de définitions, nécessaires pour préciser la définition générale de la droite) absolument comme les relations $k > 1$, $k < 1$, $k = 1$, caractérisent respectivement l'hyperbole, l'ellipse et la parabole.

VII. ***Relations analytiques caractérisant les trois géométries.*** En partant des définitions précédentes, on démontre qu'il existe entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle, l'une des relations suivantes :

$$\mathrm{Ch}\frac{a}{l} = \mathrm{Ch}\frac{b}{l}\mathrm{Ch}\frac{c}{l}, \qquad \text{(L)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad \text{(E)}$$

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right), \qquad \text{(R)}$$

suivant que l'on est en géométrie lobatchefskienne, euclidienne ou riemannienne. Les quantités constantes l et r sont dites respectivement ***constante lobatchefskienne, constante riemannienne.***

Réciproquement, au moyen de la définition générale de la droite et des relations (L), (R) ou (E), on peut établir le postulat des deux droites seul ou celui des trois droites seul, ou enfin, les deux réunis.

Les relations (L), (R), (E) caractérisent donc respectivement les trois géométries lobatchefskienne, riemannienne, euclidienne.

VIII. *Relation* (M) *équivalente* à (L), (E), (R). Posons $b + c = s$, $b - c = d$. Les relations (L), (E), (R) sont contenues dans la suivante :

$$a^2 - b^2 - c^2 =$$

$$-p\frac{s^4 + d^4 - 2a^4}{1.2.3.4} + p^2\frac{s^6 + d^6 - 2a^6}{1.2.3.4.5.6} - p^3\frac{s^8 + d^8 - 2a^8}{1.2\ldots8} - \text{etc.} \qquad \text{(M)}$$

où l'on suppose $p = -\frac{1}{l^2}$, $p = 0$, $p = \frac{1}{r^2}$. On peut donner à p (ou si l'on veut à son inverse), le nom de *paramètre* du système de géométrie considéré; p est négatif en géométrie lobatchefskienne, positif en géométrie riemannienne, nul en géométrie euclidienne.

IX. ***Il y a une infinité de géométries lobatchefskiennes et de géométries riemanniennes ayant la géométrie euclidienne pour cas limite.*** En effet, on peut donner à p toutes les valeurs négatives ou positives; de plus, pour $p = 0$, on obtient la relation qui caractérise la géométrie euclidienne.

X. ***Indémontrabilité des postulats.*** Les postulats ne peuvent être déduits de la définition générale de la droite, puisque cela reviendrait à

Digitized by Google

prouver que la relation (M), quel que soit p, équivaut à (E) seul, tandis que (M) équivaut à (E), (L), (R).

XI. *Géométrie physique.* Dans l'étude de la nature et dans les arts, on considère des *droites physiques*, qui réalisent approximativement le concept *général* de la droite défini au n° I. De même, on mesure approximativement des distances, au moyen de droites physiques. C'est ainsi que l'on constate que la *géométrie physique* est *à peu près euclidienne*, c'est-à-dire que les côtés des triangles rectangles sont liés *à peu près* par la relation (E), ou bien par la relation (M), où l'on suppose p nul ou très petit, en valeur absolue.

C'est parce que la géométrie physique est à peu près euclidienne que l'on s'est imaginé que les postulats des deux et des trois droites sont des vérités absolues régissant fatalement le monde physique.

Par une illusion semblable, celui qui n'aurait jamais rencontré, dans les applications des arts, que des coniques presque paraboliques, regarderait, pour toutes les coniques, la relation $k = 1$, comme un postulat absolument sûr, mais indémontrable.

XII. *Il est impossible de déterminer exactement p :* il faudrait, pour cela, pouvoir mesurer exactement des distances entre des points mathématiques. De même, on ne peut déterminer k exactement pour une conique tracée sur un plan.

XIII. Par suite, *il est impossible de savoir si le monde actuel est euclidien.* En effet, pour cela, il faudrait pouvoir prouver expérimentalement que $p = 0$. De même, en pratique, on ne peut jamais savoir si une conique dessinée sur un plan est une parabole.

XIV. *Peut-être pourra-t-on savoir un jour si le monde est lobatchefskien ou riemannien.* Il suffira, pour cela, que l'on puisse mesurer des distances avec assez d'exactitude pour en déduire, non la grandeur, mais le signe de p. De même, sans pouvoir mesurer exactement k pour une conique donnée, on peut parfois savoir si l'on a $k > 1$, ou $k < 1$.

XV. En géométrie lobatchefskienne, il existe des surfaces *courbes*, appelées *horisphères*, sur lesquelles se trouvent des courbes, appelées *horicycles* ayant, sur ces surfaces, les mêmes propriétés que les droites euclidiennes dans le plan euclidien (*).

(*) Nous n'avons pas démontré ce théorème dans nos articles sur la géométrie non euclidienne; mais on le trouve dans les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai.

Digitized by Google

XVI. *En quel sens la droite riemannienne est dite fermée, le plan riemannien fermé.* La droite riemannienne peut être divisée en un nombre fini de segments dont le dernier est adjacent au premier. Le plan riemannien peut être divisé en un nombre fini de parties dont les lignes limitantes, dans toute leur étendue, servent de limites à deux ou plusieurs fragments. A cause de cela, on dit que la droite riemannienne est une *ligne fermée*, le plan riemannien, une *surface fermée*. Mais *on ne doit attacher aucun autre sens à ce mot* FERMÉ.

XVII. *Pas d'espace extérieur ou intérieur à une droite riemannienne, à un plan riemannien.* Un grand cercle d'une sphère euclidienne la divise en deux parties identiques dont aucune (si l'on veut employer les mots dans leur sens usuel) ne peut être dite plus que l'autre, intérieure ou extérieure à ce grand cercle. De même, une droite riemannienne divise un plan riemannien en deux parties identiques dont aucune en peut être dite plus que l'autre intérieure ou extérieure à cette droite; un plan riemannien divise l'espace riemannien en deux parties identiques dont aucune ne peut être dite plus que l'autre intérieure ou extérieure à cette surface.

XVIII. *Rigueur logique des trois géométries.* Les trois géométries s'établissent concurremment avec la même rigueur, en partant des mêmes représentations sensibles et des mêmes notions fondamentales, sauf la distinction des trois espèces de droites, laquelle est imposée par la logique.

Par suite, *on ne peut faire au nom de la raison ou de l'observation, contre la géométrie lobatchefskienne ou la géométrie riemannienne une seule objection qui ne puisse être faite également contre la géométrie euclidienne.*

XIX. *Impuissance de l'imagination en géométrie.* On fait souvent à la géométrie riemannienne et même à la géométrie lobatchefskienne des objections basées au fond sur ce postulat :

Tout ce qui, en géométrie, est intelligible, tout ce qui est conçu par la raison, *doit être imaginable,* doit pouvoir être représenté d'une manière physique, aux sens ou à l'imagination.

Ce postulat, suivant nous, est manifestement faux. Ainsi, pour ne citer que des exemples empruntés à la géométrie euclidienne, qui peut s'imaginer la manière dont varie la courbure d'une cycloïde aux environs de son point de rebroussement ?— Qui peut se représenter la courbe

Digitized by Google

continue de Weierstrass qui n'a de tangente en aucun de ses points? — Qui peut imaginer la courbe continue de M. Köpke, qui, elle, a une tangente en chacun de ses points, mais en même temps a une infinité de maxima et de minima entre deux quelconques de ses points? — Comment se figurer la courbe continue de M. Peano, dont tous les points sont situés à des hauteurs t différentes et comprises entre 0 et 1, au-dessus du plan des xy et dont la projection sur ce plan des xy remplit *entièrement* un carré de côté 1?

En réalité, notre imagination, bien qu'indispensable pour que notre raison puisse avoir des concepts géométriques (Voir n° XXXVII), est une faculté tellement débile que, *sans l'aide de cette raison*, elle ne pourrait pas même se représenter *cent* points physiques marqués sur une feuille de papier; elle peut tout au plus constater qu'il y en a un assez grand nombre sur cette feuille, mais rien de plus.

La raison conçoit, mais l'imagination est impuissante à se représenter: 1° la droite infinie, le plan infini, l'espace infini de la géométrie d'Euclide ou de Lobatchefsky, à cause de leur *infinitude* même; 2° la droite finie, le plan fini, l'espace fini, en géométrie riemannienne; *il est impossible d'attacher à ces trois dernières notions, l'image d'une forme précise quelconque*, parce que si le monde est riemannien, nous en faisons partie et nous ne pouvons nous mettre, même par la pensée, en dehors de ce monde, pour nous en faire une représentation sensible.

II. Notes sur des points spéciaux de l'article de M. Dauge.

XX, *Sur une prétendue confusion*. La confusion entre le plan non euclidien et la sphère ou la pseudosphère euclidienne, signalée par M. Dauge, n'existe pas. En réalité,

plan euclidien et horisphère lobatchefskien;
droite euclidienne et horicycle lobatchefskien;
plan lobatchefskien et pseudosphère euclidienne;
droite lobatchefskienne et géodésique de pseudosphère euclidienne;
plan riemannien et sphère euclidienne;
droite riemannienne et grand cercle de la sphère euclidienne,

quoique ayant beaucoup de propriétés communes, sont choses distinctes. *Car elles ont aussi des propriétés différentes* et cela suffit pour renverser toute l'argumentation de ceux qui les confondent. De même, les plans et les cylindres euclidiens, dont les géodésiques ont des pro-

Digitized by Google

priétés identiques, ont aussi des propriétés différentes qui suffisent pour ne pas les confondre.

D'ailleurs, en reprenant les termes de M. Dauge, nous pourrions dire : « Tandis que, grâce à une fausse terminologie, on croit raisonner sur des plans euclidiens contenant des droites euclidiennes, on raisonne en réalité sur des horisphères et des horicycles ». *Toutes les objections de M. Dauge contre la géométrie lobatchefskienne peuvent donc se retourner contre la géométrie euclidienne.*

XXI. *Inutilité de la démonstration de M. Beltrami.* La démonstration de M. Beltrami (incomplète d'ailleurs) n'est pas élémentaire, puisque elle suppose connue la théorie des surfaces applicables les unes sur les autres sans déchirure ni duplicature.

Mais elle peut être simplifiée et rendue indépendante de toute idée de flexion ; il suffit d'y remplacer la considération de la pseudosphère et de ses géodésiques par celle du plan lobatchefskien, *qui est rigide*, et des droites lobatchefskiennes.

Si, en 1868, on eût connu les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai, la démonstration de Beltrami eût été complètement inutile, comme elle l'est maintenant.

Nous croyons avoir donné, n^{os} VII-X, la vraie raison de l'indémontrabilité absolue des postulats ; au fond, elle est empruntée à M. De Tilly.

XXII. *En quel sens on peut douter de la vérité du postulatum des trois droites.* En géométrie *physique*, affirmer du postulatum d'Euclide qu'il est vrai, revient à dire que la géométrie euclidienne est réalisée dans la nature. Nous avons dit plus haut (n^{os} XI-XIV) que l'on n'en sait rien ; que l'on ne peut jamais rien en savoir, même si c'est vrai ; que si ce n'est pas vrai, au contraire, on pourra peut-être le savoir un jour.

En géométrie *idéale*, on peut, à propos du postulatum d'Euclide « se poser les trois questions suivantes : 1° Est-il une suite de la définition ordinaire de la droite? 2° Est-il en contradiction avec cette définition de la droite? 3° En est-il indépendant? » Les géomètres non euclidiens, spécialement M. De Tilly, ont prouvé que l'on doit « répondre *non* à la première question ; *non* à la seconde ; *oui* à la troisième ». Ce sont donc eux qui, en réalité, ont les premiers rendu la géométrie euclidienne inattaquable, en établissant la compatibilité logique du postulatum d'Euclide avec la définition classique de la droite.

Digitized by Google

XXIII. *Sur l'intuition.* Que signifient au juste ces mots : *avoir l'intuition*, employés ici et plus bas par M. Dauge?

Signifient-ils *concevoir, voir au moyen de notre raison, avoir l'intuition* INTELLECTUELLE ? Mais notre raison conçoit les trois espèces de droites : euclidienne, lobatchefskienne et riemannienne. Ce n'est donc pas notre raison qui peut affirmer que deux droites perpendiculaires à une troisième dans un plan ne peuvent se rencontrer, car les droites riemanniennes ne jouissent pas de cette propriété; ce n'est pas notre raison non plus qui voit que si l'on incline l'une des perpendiculaires vers l'autre, elle la rencontrera, car cela n'arrive pas toujours en géométrie lobatchefskienne.

Avoir l'intuition signifie-t-il *voir de nos yeux*, ou *reproduire par l'imagination ce que nous avons vu de nos yeux*, autrement dit, *avoir l'intuition* SENSIBLE? Mais qui a vu, sur une surface très approximativement plane, deux perpendiculaires à une même droite, dessinées avec soin et ayant seulement dix mètres de longueur ? Qui sait, par suite, si elles restent équidistantes, si elles divergent ou si elles se rencontrent, autrement dit, si elles sont euclidiennes, lobatchefskiennes ou riemanniennes? Jusqu'à présent, l'expérience n'a rien décidé à cet égard.

Les notions que l'on obtient d'abord, par le concours des sens et de la raison, ce sont les notions *générales* de la droite et du plan, mais non les notions *spéciales* de droite euclidienne et de plan euclidien. La raison (ou l'intuition intellectuelle), nous permet ensuite de concevoir trois droites, trois plans, trois géométries; mais nos sens (ou l'intuition sensible) ne nous font voir sur une faible étendue, qu'une droite physique, qu'un plan physique et ne nous montrent réalisée qu'une seule seule géométrie physique. Nous ne savons pas auquel de nos trois *concepts* de la géométrie idéale correspond *l'image* donnée par nos sens trop imparfaits ; nous savons seulement que si l'image est euclidienne, nous ne pourrons jamais le prouver expérimentalement.

Donc, la raison, ni les sens, autrement dit, ni l'intuition intellectuelle, ni l'intuition sensible ne peuvent nous conduire légitimement à la conclusion de M. Dauge.

XXIV. *Sur la forme de la ligne droite.* Il faut faire, à propos de la forme de la ligne droite, une distinction analogue à celle de la note précédente. La droite *idéale*, être de raison étudié par l'intelligence, peut être euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne; on prouve

Digitized by Google

rigoureusement que deux droites lobatchefskiennes peuvent être asymptotes, sans leur supposer nulle part aucune ressemblance avec une hyperbole.

Quant à la droite *physique*, réalisée approximativement dans la nature et dont nos sens nous font connaître la *forme* sur une faible étendue, personne ne sait, jusqu'à présent, si elle est une droite lobatchefskienne ou riemannienne, et encore moins si elle est euclidienne pour les raisons rappelées aux nos XI-XIII.

XXV. *Sur la vérité du postulatum.* Comme nous l'avons dit, note XXII, en géométrie *idéale*, on *peut*, mais on ne *doit* pas admettre le postulatum. En *géométrie physique*, on ne sait pas, et l'on ne peut pas savoir, si l'on doit l'admettre.

XXVI. *Sur la construction des figures dans les divers systèmes de géométrie.* En géométrie *idéale*, on démontre que l'on peut construire les figures euclidiennes, lobatchefskiennes, ou riemanniennes, si l'on admet la possibilité de certaines lignes fondamentales : droite, circonférence, équidistante, etc.

En géométrie *physique*, on ne sait pas, pour les raisons données plusieurs fois, dans quel système de géométrie on opère.

XXVII. *Défense de la définition de Leibniz.* D'après la définition de Leibniz, une droite (euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne) est *immobile* quand des points *en dehors* de cette droite et qui y sont invariablement liés tournent autour de cette droite ; donc on ne peut pas dire que *la droite elle-même tourne autour de deux de ses points* : ces mots n'ont aucun sens pour une ligne immobile.

XXVIII. *Suite.* D'après les premiers principes sur l'égalité des triangles, les distances mutuelles de tous les points en dehors de la droite restent les mêmes, pendant la rotation ; donc il n'y a pas déformation.

XXIX. *Sur la droite riemannienne.* Ce raisonnement relatif à une prétendue indétermination de la droite riemannienne, est inexact, selon nous, pour toute ligne, dans n'importe quel système de géométrie. Ainsi, un arc de circonférence, quelque petit qu'il soit, détermine la circonférence toute entière.

XXX. *Prétendue bizarrerie de la géométrie riemannienne.* L'existence d'un second point de rencontre, pour deux droites riemanniennes qui en ont un premier, ne paraît bizarre que si l'on oublie la définition de cette ligne et si, sans s'en douter, l'on raisonne sur des droites euclidiennes ou

Digitized by Google

lobatchefskiennes. — Tout chemin conduit à Rome, pourvu que l'on parte du point antipode sur la sphère et que l'on marche toujours dans une même direction ; il en est de même en géométrie riemannienne plane ou solide ; mais, dans ce dernier cas, les chemins sont des droites riemanniennes et non des grands cercles.

XXXI. *Perpendiculaire à un plan riemannien.* Voir nos XIX et XXX. On ne peut pas s'*imaginer* la droite *complète* qui est perpendiculaire à un plan riemannien. Mais *la représentation partielle que nous en avons suffit pour démontrer qu'elle est unique dans les trois systèmes de géométrie*, comme on le fait dans les Traités.

XXXII. *Sur la démonstration de la propriété fondamentale d'une perpendiculaire à un plan.* Cette démonstration analytique n'est nullement nécessaire dans notre mode d'exposition; car la démonstration donnée dans la plupart des Traités de géométrie (par exemple, dans les *Éléments* de LEGENDRE-BLANCHET), et celle de M. DEBOUIS (*Mathesis*, novembre 1897, t. XVII, p. 248) appartiennent à la géométrie générale et ne renferment aucun calcul : elles sont aussi bonnes en géométrie lobatchefskienne ou riemannienne qu'en géométrie euclidienne.

XXXIII. *Il n'y a pas d'interprétation nouvelle de nos calculs, mais interprétation d'autres calculs.* Dans nos calculs, P_1, P_2, P_3 coïncident avec P et le théorème démontré appartient à la géométrie (riemannienne) *solide*; dans ceux de M. Dauge, P_1, P_2, P_3, P sont quatre points différents et le théorème démontré, qui appartient à la géométrie sphérique euclidienne, pourrait s'interpréter entièrement en géométrie riemannienne *plane*. — La démonstration d'Euclide et de Legendre de la propriété fondamentale de la perpendiculaire à un plan euclidien peut être transformée en une *autre* propriété des horicycles sur une horisphère, par le procédé de M. Dauge.

XXXIV. *Sur l'homogénéité de l'espace.* L'espace riemannien et l'espace lobatchefskien étudiés en géométrie non euclidienne sont supposés homogènes, d'après la définition même de la droite.

Selon nous, on admet, en géométrie *physique*, que l'espace est homogène, parce qu'aucune observation n'a jamais contredit cette hypothèse. Mais, en géométrie *idéale*, rien n'empêche d'étudier un espace non homogène et on l'a déjà fait.

XXXV. *Comment on pourrait savoir si la géométrie physique est non euclidienne.* Il suffirait de constater, avec une exactitude suffisante, que

Digitized by Google

deux perpendiculaires à une même droite divergent ou convergent pour savoir que la géométrie physique, dans les limites d'exactitude que comportent nos mesures, est lobatchefskienne ou riemannienne. On arriverait encore à cette dernière conclusion si l'on constatait qu'une droite est composée d'un nombre fini de segments finis dont le dernier est contigu au premier.

XXXVI. *Possibilité expérimentale de cette recherche.* Les expériences et les observations dont nous parlons devront être faites avec des *droites physiques*, réalisant autant que faire se peut, le concept général de la droite, tel qu'il est défini au n° I. Mesurer des distances, réaliser approximativement des plans et des droites ne sont pas des utopies, cela se fait tous les jours. Mais on ne sait pas si le monde où l'on opère est euclidien, lobatchefskien ou riemannien.

XXXVII. *Sur la soi-disant géométrie à plus de trois dimensions.* La soi-disant géométrie à quatre dimensions (ou plus) est de l'analyse pure où l'on applique les noms de point, ligne, surface, solide, etc., à un ensemble de quatre variables liées entre elles par 4, 3, 2 ou 1 relation; on n'y utilise nullement (et l'on ne peut y utiliser) les notions de *à droite* et *à gauche, en avant et en arrière, en haut et en bas*, qui, selon Gauss, sont l'apport que l'observation ajoute aux concepts arithmétiques pour constituer la géométrie à une, deux ou trois dimensions. Au contraire, en géométrie non euclidienne, comme en géométrie euclidienne, on recourt à ces notions essentiellement géométriques : la seule différence qu'il y ait entre la géométrie euclidienne et la géométrie non euclidienne, c'est que la première particularise la définition générale de la droite au moyen de *deux* soi-disants postulats, la seconde au moyen de *l'un* ou de *l'autre* de ces *compléments de définition* (Voir n° XVIII).

XXXVIII. *La géométrie non euclidienne solide.* Il n'est pas inutile de faire remarquer que, dans le système de notre ingénieux contradicteur, on ne peut concevoir comment Lobatchefsky a pu, dès avant 1840, écrire un système complet de géométrie non euclidienne solide (fondé sur le seul postulat des deux droites et les notions expérimentales dont il est question dans la note précédente), et même s'en servir, pour trouver des intégrales définies nouvelles. Si l'on assimile cette géométrie lobatchefskienne solide à de l'analyse pure, rien n'empêche de faire la même chose pour la géométrie euclidienne solide, d'après les n^{os} XVIII et XX.

Digitized by Google

PRIX LOBATCHEFSKY (PREMIER CONCOURS, 1897).

La *Société physico-mathématique de Kasan* a décerné, dans sa séance solennelle du 3 novembre (22 octobre) 1897, le prix Lobatchefsky à M. SOPHUS LIE, professeur ordinaire à l'Université de Leipzig, pour son ouvrage: *Theorie der Transformationsgruppen.* Band III. Leipz. 1893.

Les mentions honorables ont été accordées : 1° à M. L. GÉRARD, professeur au Lycée Ampère (Lyon), pour sa *Thèse sur la géométrie non euclidienne.* Paris. 1892; 2° à M. E. CESARO, professeur ordinaire à l'Université royale de Naples, pour ses *Lezioni di Geometria intrinseca.* Napoli. 1896; 3° à M. G. FONTENÉ, professeur au collège Rollin, pour son ouvrage *L'hyperespace à* n-1 *dimensions.* Paris. 1892.

La médaille d'or de Lobatchefsky, destinée, d'après le règlement du prix Lobatchefsky, à récompenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours, a été décernée, dans la même séance solennelle du 3 novembre 1897, à M. F. KLEIN, professeur ordinaire à l'Université de Gœttingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Lie. Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan sous le titre : *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises* (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie).

Les rapports sur les ouvrages de M. Gérard, Cesàro et Fontené ont été faits par MM. les Prof. T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la Commission. En outre, ont pris part aux travaux de la Commission, MM. les Prof. D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof, secrétaire.

Le nombre total des ouvrages présentés au concours a été égal à neuf.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papier. La Société peut en augmenter la valeur, si l'état du capital le permet.

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non euclidienne.

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la *Société Physico-Mathématique*, par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix.

Dans aucun cas, le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où plusieurs ouvrages seront d'égale valeur, c'est le sort qui décidera celui auquel le prix sera accordé.

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 novembre 1900. Selon le § 11 du règlement, les ouvrages destinés au concours doivent être adressés à la *Société Physico-mathématique* de Kasan jusqu'au 3 novembre 1899.

Le Président de la *Société Physico-mathématique* :

A. VASSILIEF.

20 décembre 1897.

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur une enveloppe.* Un correspondant nous transmet la question suivante :

On donne un angle droit xOy et un point I *du plan. Soient* P *et* Q *deux points situés l'un sur* O*x et l'autre sur* O*y,* P′ *et* Q′ *les projections de* P *et* Q *sur la droite* OI. *Montrer que si* OP′ + OQ′ = OI, *la droite* PQ *enveloppe une parabole.*

On voit immédiatement que la perpendiculaire au milieu de la droite OI passe par le milieu de PQ. La question est donc un cas particulier de la suivante, assez connue :

On donne un triangle ABC. *L'enveloppe des droites dont les segments compris entre les côtés des angles* B *et* C *sont dans un rapport constant, est une parabole touchant les trois côtés du triangle* ABC.

Pour démontrer *directement* cette dernière proposition, soient A′, B′, C′ les points où une sécante rencontre BC, CA, AB. Menons par A′ une droite parallèle à AC et rencontrant AB en M. Si le rapport A′B′ : A′C′ a une valeur constante, il en est de même du rapport MA : MC′ ; par suite, les points A′, M, C′ décrivent des ponctuelles semblables, etc.

(J. N.).

2. *Propriétés du triangle.* Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC. Les perpendiculaires élevées en B′ sur AC et en C′ sur AB rencontrent AA′ respectivement en D et E. Les droites BE et CD se coupant en L, la droite AL est la bissectrice de l'angle BLC.

En effet, appelons β, γ les perpendiculaires abaissées de A sur les droites BE, CD et désignons par β', γ' celles menées de B et C sur AA′. Les triangles ABE, ACD étant isoscèles, on a $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Or il est facile de voir que $\beta' = \gamma'$; donc $\beta = \gamma$.

Plus généralement, si A′ est un point quelconque de BC, on a :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{BA'}{CA'}.$$

Par exemple, si AA′ est la bissectrice de l'angle BAC, on a :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{AB}{AC}.$$

(A. C.).

3. *Note de géométrie* par M. A. Goulard. *Étant donné un angle* XOY, *le lieu du milieu* M *d'une sécante* AB, *telle que le produit* OA . OB *reste constant, est une hyperbole.*

Digitized by Google

Ce théorème bien connu a été démontré par M. Rebuffel (*Journal de M. Vuibert*, 15e année, p. 54), à l'aide de considérations purement géométriques. La démonstration de M. Rebuffel a été modifiée par M. Ch. Michel (*Bulletin de Mathématiques spéciales*, 1re année, p. 124). Je me propose de traiter de nouveau cette question, en la simplifiant encore, si c'est possible.

1° *Dans un triangle* OAB, *on porte sur la bissectrice de l'angle* O, *de part et d'autre du sommet, une longueur* OF = OF′ *moyenne proportionnelle entre les côtés* OA *et* OB : *en désignant par* M *le milieu de* AB, *l'angle* FMF′ *a pour bissectrice* AB.

Cette proposition remarquable a été démontrée par M. Rebuffel (*loc. cit.*).

2° *Dans un triangle* FMF′, *soient* O *le milieu du côté* FF′, D *le pied de la bissectrice de l'angle* M, *et* P *le pied de la hauteur issue du sommet* M; *on a*

$$OD \cdot OP = \tfrac{1}{4}(MF' - MF)^2.$$

Cette proposition est bien connue. (Voir, par exemple, Rouché et de Comberousse, exercice 170).

3° *Dans un triangle* OAB, *soit* OP *la projection de la médiane* OM *sur la bissectrice* OD; *on a*

$$OD \cdot OP = OA \cdot OB \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} AOB.$$

En effet, en posant OA = a, OB = b, AOB = θ, on voit facilement que

$$OP = \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}\theta.$$

D'autre part, on sait que

$$OD = \frac{2ab}{a+b} \cos \tfrac{1}{2}\theta.$$

Donc

$$OD \cdot OP = ab \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Cela étant, soit OA . OB = m^2. Portons sur la bissectrice de l'angle XOY, de part et d'autre du sommet O, une longueur OF = OF′ = m.

D'après 1°, la droite AB est bissectrice de l'angle FMF′; et, d'après 2° et 3°, on a alors

$$MF' - MF = 2m \cos \tfrac{1}{2} XOY.$$

4. *Sur l'hyperbole équilatère*, par M. A. Goulard (professeur au lycée de Marseille). Les propriétés suivantes étant peu connues, il n'est peut-être pas inutile de les rappeler.

Digitized by Google

Soient B *et* C *les sommets d'une hyperbole équilatère,* A *un point quelconque de la courbe. Dans le triangle* ABC,

1° *La hauteur issue du sommet* A *est une moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le côté* BC ;

2° *Les carrés des côtés* AB *et* AC *sont entre eux comme leurs projections sur le côté* BC ;

3° *La différence des angles* B *et* C *est égale à un droit* ;

4° *On a, entre les côtés* a, b, c, *la relation*

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2 (b^2 + c^2).$$

Soit AD la hauteur issue du sommet A.

1° L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses axes de symétrie, est

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{4} a^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = (x + \tfrac{1}{2} a)(x - \tfrac{1}{2} a),$$

c'est-à-dire $\overline{AD}^2 = BD \times CD$(*).

2° L'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

ce qui montre que les triangles ABD et ACD sont semblables. Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

d'où, en éliminant AD,

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CD}{BD}.$$

3° De la similitude des triangles ABD et ACD, on déduit encore

$$\text{angle ABD} = \text{CAD},$$

ou, en supposant le point A du côté du sommet B,

$$2dr. - B = 1dr. - C,$$

d'où

$$B - C = 1dr.$$

4° De la proportion

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CD}{BD},$$

(*) Soit B' le symétrique de B par rapport au pied de la hauteur AD. L'égalité $\overline{AD}^2 = BD.CD = B'D.DC$ montre que le triangle AB'C est rectangle en A ; on en conclut la 2me et la 3me partie du théorème. (J. N.).

Digitized by Google

on tire

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{BC}{CD + BD}.$$

Mais

$$\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 \quad \text{ou} \quad BC(CD + BD) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

Donc

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2},$$

ou

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2).$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 857.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 176).

On considère les ellipses osculatrices à un cercle donné en un point donné de ce cercle et ayant même aire que le cercle. Montrer que 1° *le lieu du centre des ellipses est une ligne droite;* 2° *l'enveloppe des axes est une parabole;* 3° *le lieu des projections du point donné sur les axes est une cissoïde;* 4° *le lieu des sommets est une courbe unicursale du* 5° *degré;* 5° *le lieu des foyers est une strophoïde droite;* 6° *la tangente à l'ellipse au second point de rencontre avec le cercle a pour enveloppe une hyperbole.* (E. N. Barisien).

Solution par M. Absolonne. 1° Soient a, b les demi-axes d'une ellipse osculatrice au cercle au point O(*); a', b' le demi-diamètre passant par O et son conjugué. On aura $R = \frac{b'^2}{ab}$; mais $ab = R$ puisque l'ellipse doit avoir même aire que le cercle, donc $b' = R$ et comme $a'b' \sin\theta = ab = R^2$, on a $a' \sin\theta = R$ (θ est l'angle du diamètre a' avec son conjugué ou avec la tangente en O). Il résulte de là que le centre de l'ellipse appartient à une parallèle à la tangente en O menée par le centre du cercle.

2° Soient C le centre du cercle et C'M, C'E les axes de l'ellipse qui rencontrent en M, E la tangente menée en O; P la projection de C' sur cette tangente; on aura, d'après un théorème connu, $MP.PE = R^2 = MO.OE$, ce qui exige $MO = PE$.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Digitized by Google

Par conséquent, si nous menons par M une perpendiculaire à MC′ elle coupera OC en un point F tel que OF = R, car les triangles C′PE, MOF sont égaux. La perpendiculaire à C′E en E passera également par F et l'on voit que les axes sont tangents à une parabole de sommet O et de foyer F.

3° Prenons le symétrique F′ de F par rapport à C′M, projetons O en I sur cet axe et menons CH perpendiculaire à OI. On voit facilement que OH rencontre la droite CC′ en un point D tel que DC = PE = MO; les triangles DHC, MIO étant égaux, on a DH = IO. Le lieu de I est donc une cissoïde dont le cercle générateur est décrit sur OC comme diamètre.

5° Menons par le foyer f de l'ellipse osculatrice une perpendiculaire à la tangente en O qui rencontre celle-ci en Q et la tangente parallèle au point R. On aura

$$fQ.fR = b^2 = fQ.(2R - fQ),$$

d'où, la projection OK de OC sur Of étant égale à b,

$$fQ = R - \sqrt{R^2 - b^2} = R - KC.$$

Désignons l'angle GOC par φ, G étant le point où Of coupe C′C; il viendra

$$Gf = \frac{R - fQ}{\cos\varphi} = \frac{KC}{\cos\varphi} = GC.$$

Le point S obtenu en prolongeant OG de GS = GC, est évidemment le symétrique du second foyer de l'ellipse par rapport à OC; on voit que les deux foyers sont sur une strophoïde droite dont O est le sommet et C le point double.

6° La tangente au second point de rencontre de l'ellipse avec le cercle marque sur les tangentes au cercle aux extrémités du diamètre OC deux divisions homographiques; elle enveloppe donc une conique qui est, dans ce cas, une hyperbole.

4° Si l'on prend pour axes la tangente et la normale au point donné O, le cercle et l'ellipse seront représentés par

$$y^2 + x^2 - 2Ry = 0, \quad x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$

et puisqu'au point O on a

$$y' = 0, \quad y'' = \frac{1}{R}, \quad D = 0, \quad E = -R,$$

Digitized by Google

le produit des carrés des axes de l'ellipse est

$$-\frac{\Delta^2}{\delta^2}=\frac{R^4}{(C-B^2)^3},\quad \text{d'où}\quad ab=\frac{R^2}{\sqrt{(C-B^2)^3}}=R^2;$$

par conséquent,

$$C-B^2=1.$$

L'équation aux axes de la courbe est

$$(x+By)^2-(y-R)(Bx+cy-R)=0.$$

Si l'on remplace C par B^2+1 dans l'équation de l'ellipse, on trouve ;

$$(x+By)^2+y^2-2Ry=0,$$

d'où l'on tire la valeur de B et par suite celle de C qu'il suffit de remplacer dans l'équation aux axes.

Le lieu des sommets est représenté par

$$y(Ry+R^2-y^2)^2=x(y-R)^2(2R-y).$$

6° La corde commune au cercle et à l'ellipse a pour équation

$$By+2x=0;$$

les coordonnées du point où elle coupe le cercle sont

$$x'=-\frac{4BR}{4+B^2},\quad y'=\frac{8R}{4+B^2},$$

ce qui donne pour la tangente à l'ellipse en ce point, après avoir remplacé C par $1+B^2$

$$4Bx+y(4+3B^2)-8R=0.$$

Dérivons par rapport à B, il vient

$$2x+3By-0;$$

en éliminant B entre les 2 dernières équations on trouve l'équation de l'enveloppe

$$3y^2-2x^2+x-3R^2=0,$$

qui prend la forme

$$\frac{y^2}{R^2}-\frac{x^2}{3R^2}=1,$$

quand on transporte l'origine au centre du cercle. Elle représente une hyperbole dont les foyers sont à une distance 2R de C.

Solutions analogues par MM. Déprez, Brocard et Servais.

Digitized by Google

×Question 1114.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 80).

Construire un parallélogramme ABCD *semblable à un parallélogramme abcd et tel que les sommets* A *et* C *se trouvent sur une circonférence* O *et les deux autres sommets* B *et* D *sur une seconde circonférence donnée* O'.

Cas particulier où ABCD *est un carré.* (Soons).

Solution par MM. E. Colart et J. Déprez. Soit I le centre du parallélogramme cherché, *i* celui du parallélogramme donné; l'angle OIO', dont les côtés sont perpendiculaires à AC et BD sera égal à l'angle connu AIB. D'ailleurs, en désignant par R et R' les rayons des cercles donnés, on aura

$$\frac{R^2 - \overline{OI}^2}{R'^2 - \overline{O'I}^2} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{BI}^2} = \frac{\overline{ai}^2}{\overline{bi}^2} = k^2,$$

d'où

$$\overline{OI}^2 - k^2 . \overline{O'I}^2 = R^2 - k^2 R'^2.$$

Le point I se trouve donc sur une circonférence ayant son centre Q sur OO' à une distance $O'Q = \frac{OO'}{1 - k^2}$; et est, par conséquent, déterminé par cette circonférence et l'arc du segment capable de l'angle *aib* décrit sur OO'. Le parallélogramme s'achève alors facilement.

Dans le cas du carré, on a $k = 1$ et, par suite,

$$\overline{OI}^2 - \overline{O'I}^2 = R^2 - R'^2,$$

équation qui détermine la projection de I sur OO'. Le point I se trouve, d'autre part, sur la circonférence de diamètre OO'.

×Question 1116.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 102).

Etant donné un triangle ABC, *la bissectrice de l'angle intérieur* ACB *rencontre le côté* AB *en* C'; *la bissectrice extérieure du même angle rencontre le côté* AB *en* C'_1. *On prend sur* AB : 1° *le point* C'' *vers l'intérieur du triangle, tel que* C''B = AC'; 2° *le point* C''_1 *vers l'extérieur du triangle, tel que* $C''_1B = C'_1A$. *Démontrer les relations*

$$\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2 = (BC - AC)^2$$

$$\overline{CC''_1}^2 - \overline{CC'_1}^2 = (BC + AC)^2$$

(E. N. Barisien).

Digitized by Google

Solution par M. J. Degueldre, Droz Farny, François. Représentons par a, b, c les côtés du triangle ABC. Le théorème de Stewart donne successivement :

$$a^2 \cdot AC'' + b^2 \cdot BC'' = c\,(\overline{CC''}^2 + AC'' \cdot BC'')$$
$$a^2 \cdot AC' + b^2 \cdot BC' = c\,(\overline{CC'}^2 + AC' \cdot BC')$$

d'où par soustraction

$$(a^2 - b^2)(BC' - AC') = c\,(\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2).$$

Or

$$BC' - AC' = \frac{ac}{a+b} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{a+b}.$$

On a donc

$$\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2 = (a-b)^2.$$

2° Menons CH perpendiculaire à AB. On a

$$\overline{CC_1''}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HC_1''}^2$$
$$\overline{CC_1'}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HC_1'}^2$$

d'où, par soustraction :

$$\overline{CC_1''}^2 - \overline{CC_1'}^2 = (HC_1'' - HC_1')(HC_1'' + HC_1') = (HB - HA)(c + 2AC_1').$$

en supposant A, B aigus et A > B; or

$$HA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad HB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \quad AC_1' = \frac{cb}{a-b};$$

il en résulte

$$\overline{CC_1''}^2 - \overline{CC_1'}^2 = (a+b)^2.$$

Autres solutions par MM. Déprez, Soons, Libert, Colart et Delahaye.

On démontre encore facilement la relation

$$\overline{CC'}^2 + \overline{CC_1'}^2 = \left(\frac{2abc}{a^2 - b^2}\right)^2.$$ (Delahaye).

×Question 1147.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 279).

Trouver deux entiers consécutifs dont l'un soit un carré et l'autre un triangulaire. (de Rocquigny).

Solution par M. A. Goulard (Marseille) et M. Emmerich (Mulheim s/ Ruhr). On doit avoir

$$x^2 - \tfrac{1}{2}y(y+1) = \pm 1,$$

Digitized by Google

d'où, en posant $2x = z$ et $2y + 1 = t$,

$$2z^2 - t^2 = 7 \quad \text{ou} \quad -9.$$

I. Considérons d'abord l'équation

(1) $$2z^2 - t^2 = 7.$$

Comme z est premier avec 7, on peut poser

$$t = \lambda z - 7v,$$

v étant une nouvelle inconnue, et λ étant un coefficient à déterminer, qu'on peut supposer positif et $< \frac{7}{2}$. L'équation (1) devient alors

$$\frac{2 - \lambda^2}{7} z^2 + 2\lambda zv - 7v^2 = 1.$$

Pour que $\frac{2 - \lambda^2}{7}$ soit entier, on doit faire $\lambda = 3$; donc

$$z^2 - 6zv + 7v^2 = -1,$$

ou enfin, en posant $z - 3v = u$,

$$u^2 - 2v^2 = -1.$$

Les valeurs positives de u et v qui vérifient cette équation sont données par l'égalité

$$u + v\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n+1}.$$

Pour que les valeurs correspondantes de z et t soient positives, on doit prendre

$$\left.\begin{aligned} z &= 3v + \varepsilon u, \\ t &= 3u + 2\varepsilon v, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On obtient ainsi les deux séries de solutions :

$$\varepsilon = -1 \left\{\begin{aligned} x &= 1, \quad 4, \quad 23, \quad 134, \quad \ldots\ldots \\ y &= 0, \quad 5, \quad 32, \quad 189, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon = +1 \left\{\begin{aligned} x &= 2, \quad 11, \quad 64, \quad 373, \quad \ldots\ldots \\ y &= 2, \quad 15, \quad 90, \quad 527, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

II. Considérons maintenant l'équation

(2) $$2z^2 - t^2 = -9.$$

On voit facilement que $2z^2 - t^2$ n'est divisible par 3 que si z et t sont divisibles par 3. En posant

$$z = 3v, \quad t = 3u,$$

l'équation (2) devient

$$u^2 - 2v^2 = 1.$$

Digitized by Google

Les valeurs de u et v sont données par l'égalité

$$u + v\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n},$$

d'où

$$\begin{cases} x = 0,\ 3,\ 18,\ 105,\ \ldots\ldots \\ y = 1,\ 4,\ 25,\ 148,\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les trois séries de solutions satisfont aux formules de récurrence

$$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1},$$
$$y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1} + 2.$$

Autres solutions par MM. AUDIBERT, DINTZL et H. BROCARD.

NOTE, par M. BOUTIN. La question précédente peut être généralisée de cette façon : *Trouver deux entiers dont la différence soit n et tels que l'un soit un carré et l'autre un triangulaire.*

On a à résoudre les équations indéterminées :

$$x^2 \pm n = \frac{y(y+1)}{2}.$$

On constate que l'une, ou l'autre de ces équations, ou simultanément toutes les deux, admettent en général une infinité de solutions pour chaque valeur de n. — Les valeurs de n pour lesquelles aucune des deux équations indiquées n'a de solution sont telles que $8n + 1$ et $8n - 1$ admettent un ou plusieurs facteurs premiers de la forme $8k \pm 3$, affecté d'un exposant impair. — Ces premières valeurs de n, c'est-à-dire les premiers nombres qui ne sont jamais la différence d'un carré et d'un triangulaire, sont :

$$7,\ 18,\ 23,\ 31,\ 37,\ \ldots\ldots$$

Pour l'équation $n^2 - 1 = \frac{1}{2}y(y+1)$, on peut se reporter à la question 1009 (*Mathesis*, (2) VI, p. 28).

Note bibliographique par M. H. BROCARD.

×Question 1149.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 279 et (2) II, p. 121).

Résoudre le système

$$(y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2 = (x+y)(x-y)^2$$

(MOORE.)

Solution par M. EMMERICH. On a évidemment les solutions

$$x = y = z,\quad x = y = -z,\quad x = -y = z,\quad -x = y = z.$$

Digitized by Google

En excluant ces cas où deux quelconques des inconnues sont égales, la valeur commune p des trois produits sera différente de 0. De

$$y^3 - z^3 = \frac{p}{y-z}, \quad z^3 - x^3 = \frac{p}{z-x}, \quad x^3 - y^3 = \frac{p}{x-z} \cdots,$$

on tire, successivement,

$$\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} = 0,$$

$$(y-z)^2 = (z-x)(x-y), \text{ etc.}$$

$$(z-x)(x-y)(y-z) = (y-z)^3 = (z-x)^3 = (x-y)^3.$$

En combinant par voie de division les dernières égalités avec le système donné, on trouve

$$\frac{y-z}{y+z} = \frac{z-x}{z+x} = \frac{x-y}{x+y},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y},$$

$$x^2 = yz, \quad y^2 = zx, \quad z^2 = xy,$$

$$x^3 = y^3 = z^3,$$

ce qui montre que x, y, z sont proportionnels aux racines cubiques de l'unité dans un ordre quelconque.

La même question a déjà été proposée sous le n° 753 dans *Mathesis* et résolue, (2) 2, p 121. L'*Ed. Times* auquel nous l'avons empruntée, l'a également proposée deux fois. *Bis repetita placent.* (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1157.** Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$2^{x+1} + 2^x + 1 = u^2. \qquad \text{(de Rocquigny.)}$$

1158. D'un point M on mène les deux tangentes à une ellipse; soient P et Q les points de contact. Trouver le lieu du point M tel que la circonférence MPQ soit tangente à l'ellipse. (E. Lemoine.)

1159. Etant donnés trois points A, B, C situés sur une droite Δ, on prend un point M variable sur une droite Δ' passant par C. Trouver le lieu des centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles MAC et MAB. (E. N. Barisien.)

Digitized by Google

1160. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs et A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés d'un triangle ABC. Démontrer que les côtés des deux triangles A′B′C′ et $A_1B_1C_1$ sont tangents à une même parabole ayant pour foyer le point de Steiner du triangle $A_1B_1C_1$. (Droz Farny).

QUESTIONS D'EXAMENS.

822. On dit qu'un polygone régulier convexe est une dalle de plan lorsque le plan indéfini peut être recouvert par des polygones égaux au premier qui sont réunis sans vides ni empiètements par des côtés communs ou autour de sommets communs. Cette définition étant posée, on demande quels sont les polygones dont chacun soit une dalle du plan.

Montrer que le problème revient à résoudre en nombres entiers x et y l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$$

(Baccalauréat, *Rennes*, 1896).

Si autour d'un même point on peut assembler y polygones réguliers de x côtés, on a la condition

$$\frac{2(x-2)}{x}\cdot y=4, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad y=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}.$$

On en conclut $x-2=1$, 2 ou 4, etc.

823. Résoudre un triangle isoscèle, connaissant les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit.

Éliminer a ou B entre les équations

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad a=2R\sin 2B.$$

La dernière donne

$$a=8R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)=8R\,\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)^2};$$

d'où l'équation

$$(a^2+4r^2)^2=16Rr(a^2-4r^2).$$

Pour *construire* le triangle, on s'appuie sur la relation

$$OI=\sqrt{R(R-2r)}.$$

Digitized by Google

*PROPOSITIONS SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES,

par M. DE ROCQUIGNY-ADANSON.

I. La question 149 (*Mathesis*, II, p. 144 et III, pp. 63 et 78), que nous avons proposée dans ce Journal, peut être généralisée ainsi :

« Soit donnée une progression arithmétique de raison quelconque r et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne	l'unité.
Sur la 2e ligne	les $2.r+1$ termes suivants;
Sur la 3e ligne	les $4.r+1$ termes suivants;
Sur la 4e ligne	les $6.r+1$ termes suivants;
. . . . .	
Sur la $n$ème ligne	les $2(n-1).r+1$ termes suivants.

La somme des termes de la $n$ème ligne est égale à :

$$[(n-1)r]^3+[(n-1)r+1]^3.$$

Si $r=1$, on a la question 149.

II. Soit donnée une progression arithmétique de raison quelconque r et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne	les $2.r-1$ premiers termes;
Sur la 2e ligne	les $4.r-1$ termes suivants;
Sur la 3e ligne	les $6.r-1$ termes suivants;
. . . . .	
Sur la $n$ème ligne	les $2n.r-1$ termes suivants.

L'ensemble des termes d'une horizontale quelconque est la somme de deux cubes.

On trouve, pour la $n$ème horizontale :

$$(n.r)^3+(n.r-1)^3.$$

III. Soit donnée une progression arithmétique de raison paire $r=2p$ et commençant par l'unité.

Digitized by Google

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . les $p - 1$ premiers termes ;
Sur la 2e ligne . . . . les $2.p - 1$ termes suivants ;
Sur la 3e ligne . . . . les $3.p - 1$ termes suivants ;
. . . . . .
Sur la $n^{ème}$ ligne . . . . les $n.p - 1$ termes suivants.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve pour la $n^{ème}$ horizontale :

$$(n.p - 1)^3.$$

IV. Soit donnée une progression arithmétique de raison paire $r = 2p$ et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . l'unité ;
Sur la 2e ligne . . . . les $p + 1$ termes suivants ;
Sur la 3e ligne . . . . les $2.p + 1$ termes suivants ;
Sur la 4e ligne . . . . les $3.p + 1$ termes suivants ;
⋮ ⋮
Sur la $n^{ème}$ ligne . . . . les $(n - 1).p + 1$ termes suiv.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve, pour la $n^{ème}$ horizontale :

$$[(n - 1)p + 1]^3.$$

V. Voici une généralisation de la Question 625 (*Mathesis*, T. VIII, p. 216 et T. IX, p. 102).

Soient données les deux progressions arithmétiques :

(A) $1, \quad 1 + p, \quad 1 + 2p, \ldots\ldots$
(B) $1, \quad 1 + 2p, \quad 1 + 4p, \ldots\ldots$

où p est un nombre entier quelconque.

On partage les termes de la seconde (B) en groupes de termes consécutifs, tels que le nombre des termes du $n^{ème}$ groupe soit égal au $n^{ème}$ terme de la première progression (A). Soit S_n la somme des termes de ce groupe.

Digitized by Google

Démontrer que S_n est un cube parfait.

Si l'on intervertit les rôles des deux progressions, la somme S'_n des termes du $n^{ième}$ groupe de la première progression (A) est la somme de deux cubes.

On trouve

$$S_n = [(n-1)p+1]^3,$$
$$S'_n = [(n-1)p]^3 + [(n-1)p+1]^3.$$

Si l'on fait $p = 2^m$, on a la question 625.

VI. Voici une remarque qui est peut-être nouvelle :

Si l'on intercale entre deux carrés entiers consécutifs n^2, $(n+1)^2$, tous les nombres pairs ou impairs naturels, suivant que n est pair ou impair, l'ensemble forme un cube.

On a

$$\begin{aligned} &1,\ 3,\ 4, = 2^3 \\ &4,\ 6,\ 8,\ 9, = 3^3 \\ &9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 16, = 4^3 \\ &\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots \\ n^2,\ n^2+2,\ n^2+4,\ \ldots\ldots,\ n^2+2n,\ (n+1)^2, &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

VII. Le cube 8, décomposable en (3,5), (2,6), (1,7), (0,8), donne quatre progressions correspondantes, décomposables en cubes :

$$\left.\begin{aligned} &3,\ 5, \text{ somme } 2^3, \\ &7,\ 9,\ 11, \quad » \quad 3^3, \\ &13,\ 15,\ 17,\ 19, \quad » \quad 4^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &n^2-n+1,\ n^2-n+3,\ \ldots\ldots,\ n^2+n-1, \quad » \quad n^3. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

$$\left.\begin{aligned} &2,\ 6, \text{ somme } 2^3, \\ &10,\ 14,\ 18,\ 22, \quad » \quad 4^3, \\ &26,\ 30,\ 34,\ 38,\ 42,\ 46, \quad » \quad 6^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(2n-1)^2+1,\ (2n-1)^2+5,\ \ldots\ldots,\ (2n+1)^2-3, \quad » \quad (2n)^3, \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

$$\left.\begin{aligned} &1,\ 7, \text{ somme } 2^3, \\ &13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37, \quad » \quad 5^3, \\ &43,\ 49,\ 55,\ 61,\ 67,\ 73,\ 79,\ 85, \quad » \quad 8^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(3n-3)(3n-2)+1,\ (3n-3)(3n-2)+7,\ \ldots\ldots,\ 3n(3n+1)-5, \quad » \quad (3n-1)^3, \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{rr} 0,\ 8, & \text{somme } 2^3, \\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48,\ 56, & \text{»} \quad 6^3, \\ 64,\ 72,\ 80,\ 88,\ 96,\ 104,\ 112,\ 120,\ 128,\ 136, & \text{»} \quad 10^3, \\ \vdots & \vdots \\ [4(n-1)]^2,\ [4(n-1)]^2+8,\ \ldots\ldots\ldots,\ (4n)^2-8, & \text{»} \quad [2(2n-1)]^3. \end{array}\right\} \text{(D)}$$

Les horizontales générales sont de rang n, sauf pour (A), où l'horizontale est de rang $n-1$.

VIII. On peut généraliser les résultats du § précédent, par l'introduction d'un seul nombre *négatif :*

$$\begin{array}{rr} -1,\ 9, & \text{somme } 2^3, \\ 19,\ 29,\ 39,\ 49,\ 59,\ 69,\ 79, & \text{»} \quad 7^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 5[5(n-1)^2-n-1]+9,\ \ldots\ldots,\ 5(5n^2-n-2)-1, & \text{»} \quad (5n-3)^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} -2,\ 10, & \text{somme } 2^3, \\ 22,\ 34,\ 46,\ 58,\ 70,\ 82,\ 94,\ 106, & \text{»} \quad 8^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 12[3(n-1)^2-n]+10,\ \ldots\ldots,\ 12(3n^2-n-1)-2, & \text{»} \quad (6n-4)^3. \end{array}$$

IX. Soit la progression arithmétique générale :

$$-a,\quad a+8,\quad 3a+16,\quad 5a+24,\quad 7a+32,\quad \ldots\ldots$$

de raison $2a+8$ et commençant par le nombre entier *négatif* $-a$.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . . les $(a+4)-(a+2)$ premiers termes.
Sur la 2e ligne . . . . . les $2.(a+4)-(a+2)$ termes suivants.
Sur la 3e ligne . . . . . les $3.(a+4)-(a+2)$ termes suivants.
⋮ ⋮ ⋮ . . . . . ⋮ ⋮ ⋮
Sur la $n^{ème}$ ligne . . . . . les $n(a+4)-(a+2)$ termes suivants.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve, pour la $n^{ème}$ horizontale :

$$[(a+4)\,n-(a+2)]\,.$$

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES,

Étude bibliographique, par M. H. BROCARD.

L'intérêt qui s'attache à l'étude géométrique des normales à l'ellipse et au rôle important que jouent les cercles Σ et Σ' concentriques à l'ellipse et de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$, explique pourquoi plusieurs des propriétés signalées dans les monographies et additions publiées récemment dans *Mathesis* (1895, 129, 158, 241; 1896, 193) avaient été déjà obtenues depuis quelque temps par d'autres chercheurs.

L'objet du présent article est donc moins d'ajouter de nouvelles propositions que de signaler des travaux antérieurs qui avaient échappé à l'attention des auteurs des récents mémoires susmentionnés. Ce sera une sorte de bibliographie rétrosprective qui pourtant ne fera pas double emploi avec les résultats publiés.

Parmi les auteurs qui semblent avoir tenté une étude systématique des cercles Σ et Σ', je dois signaler MM. J. BRUNO, C. de POLIGNAC, et particulièrement M. BÖKLEN, à Reutlingen.

La proposition **2** (1895, 130) est l'énoncé de la question 1212 des N. A. M. (J. BRUNO), résolue 1876, 381 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 730).

Au sujet des énoncés **1** et **2**, voir aussi N. A. M., quest. 1114, 1115 et 1116 (C. de POLIGNAC) résolues 1873, 282-285 (*Laisant, Problèmes*, IV. N^{os} 418, 419, 420)(*) et un article de M. D'OCAGNE (N. A. M., 1888, 281-282).

Sur une propriété du rayon de courbure, voir N. A. M., question 1113 (C. de POLIGNAC), résolue 1873, 280-282 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 124).

Relativement à la proposition **17** (*Mathesis*, 1895, p. 158), voir N. A. M., question 1101 (J. BRUNO) résolue 1874, 247-250 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 75) et aussi une note de M. L. PAILLOTE (N. A. M., 1869, 269).

M. BÖKLEN a fait des recherches plus étendues et plus suivies, dont le résumé a été publié en 1884 dans le *Journal de Hoffmann* (*Zeitschrift f. Math., u. Nat. Unterricht*, XV, 21-23).

(*) Aux lecteurs qui n'ont pas à leur disposition immédiate la collection des N. A. M., nous donnons une facilité nouvelle par l'indication de la correspondance de ces questions avec le répertoire récemment édité par M. Laisant.

Digitized by Google

Nous avons pensé que leur adaptation au présent recueil serait d'une grande utilité et pourrait provoquer de nouveaux efforts dans une étude qui a déjà fourni une si abondante moisson de résultats géométriques.

On trouve, dans les *Œuvres complètes* de STEINER (t. II, p. 671), la proposition suivante (rédigée d'une manière un peu différente) :

« Etant donnée une ellipse E ayant O pour centre et a, b pour demi-« axes, du point O comme centre, avec $a + b$ pour rayon, on décrit une « circonférence Σ. Il existe une infinité de triangles (T) ABC, circons-« crits à l'ellipse E et inscrits à la circonférence Σ ou à la circonférence « Σ' (*Mathesis*, 1895, p. 248, n° **101**).

« Le produit des distances du point O à leurs côtés est égal à « $\frac{ab}{2}(a \pm b)$.

« Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle (T) ABC. Le « produit des distances du point O aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ est « égal à $\frac{a^2b^2}{4(a \pm b)}$. Les cercles circonscrits aux triangles (T) (ou A,B,C,) « sont égaux et leurs centres sont à une distance constante du point O, « aussi bien que l'orthocentre H de chaque triangle (T), que le barycen-« tre, etc. »

Dans ce qui va suivre nous considérons d'abord les propriétés où intervient le signe +.

1. $$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{ab}{2(a+b)^2}.$$

REMARQUE. Dans la Note de M. BÖKLEN, on a imprimé une somme de cosinus; cette erreur typographique provient probablement d'une confusion entre les signes + et ×. Cette formule a été donnée dans *Mathesis*, *loc. cit.*, p. 249, n° **107**.

2. $$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

3. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

4. $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Ces formules sont bien celles qui ont été données (*loc. cit.* p. 249, n° **106**).

Digitized by Google

5. La somme des carrés des distances de O aux trois côtés du triangle (T) a pour valeur $a^2 + ab + b^2$. (*Loc. cit.*, n° **108**).

6. Le produit des segments supérieurs des hauteurs du triangle (T) est égal à $4ab\,(a+b)$; la somme de leurs carrés est $4(a^2+ab+b^2)$.

7. Le produit des segments inférieurs des hauteurs est $2\dfrac{a^2b^2}{a+b}$.

8. L'orthocentre H des triangles (T) décrit la circonférence Σ' de rayon $a-b$, le centre du cercle d'Euler $A_1B_1C_1$ décrit la circonférence de rayon $\frac{1}{2}(a-b)$, le barycentre décrit la circonférence de rayon $\frac{1}{3}(a-b)$, et l'orthocentre H′ des triangles dont A, B, C sont les milieux des côtés, décrit la circonférence Σ'. (*Loc. cit.* n° **102**, nouvelle rédaction, 1896, 194).

Les quatre points susmentionnés sont sur un diamètre de ce cercle ; H et H′ en sont les extrémités. Les hauteurs qui se rencontrent en H′ sont normales à l'ellipse E.

9. Considérons un triangle (T) circonscrit à l'ellipse E et inscrit au cercle Σ. Les normales à l'ellipse aux trois points de contact se rencontrent sur la circonférence Σ', de rayon $(a-b)$, en un point H′. Le pied de la quatrième normale qu'on peut mener du point H′ et le quatrième point d'intersection, avec l'ellipse, du cercle passant par les trois points de contact sont diamétralement opposés sur l'ellipse E.

10. Le cercle d'Euler du triangle (T) ABC est tangent aux cercles *principal* et *secondaire*; il rencontre l'ellipse E en quatre points A_2, B_2, C_2, D_2; trois forment un triangle $A_2B_2C_2$, dont les côtés sont tangents au cercle de rayon $\dfrac{ab}{a+b}$. Les normales à E aux sommets de ce triangle se rencontront en un point H, situé sur l'ellipse ayant pour demi-axes $\frac{b}{a}(a-b)$ et $\frac{a}{b}(a-b)$. Cette ellipse est, comme le cercle Σ', inscrite et tangente à la développée de l'ellipse E (*Loc. cit.*, n° **36**). Le quatrième point D_2 et le pied de la quatrième normale issue du point H′, sont diamétralement opposés sur l'ellipse E.

11. Le cercle d'Euler du triangle T (ABC) est circonscrit à un autre triangle $A_3B_3C_3$, formé par les pieds des hauteurs du triangle (T). Le centre du cercle inscrit au triangle $A_3B_3C_3$ est sur la circonférence Σ' et son rayon a pour valeur $\dfrac{ab}{a+b}$. Si maintenant le triangle (T) se déplace en restant circonscrit à l'ellipse E et inscrit au cercle Σ, les deux trian-

Digitized by Google

gles $A_2B_2C_2$ et $A_1B_1C_1$ se déplacent en même temps. Représentant par R et r le rayon du cercle circonscrit et inscrit à l'un de ces triangles, on aura, pour les divers couples de triangles, $R = \frac{a+b}{2}$, et $r = \frac{ab}{a+b}$, c'est-à-dire deux constantes. Cela posé :

13. *a*) La somme des cosinus des angles est $1 + \frac{r}{R}$.

b) La somme des carrés des cosinus des demi-angles est $2 + \frac{r}{2R}$.

c) La somme des carrés des sinus des demi-angles est $1 - \frac{r}{2R}$.

d) Le produit des sinus des demi-angles est $\frac{r}{4R}$.

e) Le quotient du produit des côtés par le périmètre est $2Rr$.

f) La somme des médiatrices est $R + r$.

g) La somme des segments supérieurs des hauteurs est $2(R + r)$.

h) La somme des inverses des hauteurs est $\frac{1}{r}$.

i) La somme des rayons des cercles ex-inscrits est $4R + r$.

k) La somme des inverses de ces rayons est $\frac{1}{r}$.

l) La somme des carrés des distances du point O aux centres des trois cercles ex-inscrits est $11R^2 + 2Rr$.

m) Le produit des distances du centre du cercle inscrit aux trois sommets est $4Rr^2$.

n) Le produit des distances du centre du cercle inscrit aux centres des trois cercles ex-inscrits est $16R^2r$.

o) La somme des carrés de ces distances est $16R^2 - 8Rr$.

p) La somme des carrés des côtés au triangle ayant pour sommets les centres des cercles ex-inscrits est $32R^2 + 8Rr$.

Remarque. Les triangles $A_2B_2C_2$ sont ceux dont Steiner (II, p. 671 et suiv.) a signalé quelques propriétés. Dans ses propositions, le signe — doit intervenir lorsque a est $> 2b$. En dehors des triangles (T) ABC, ces variétés d'ellipse peuvent être circonscrites à d'autres triangles $A_0B_0C_0$ ayant leurs sommets sur la circonférence Σ'. Plusieurs des propriétés susmentionnées s'appliquent à ces triangles, mais avec modification. En combinant le théorème de Poncelet sur les triangles à la fois

Digitized by Google

inscrits et circonscrits à des coniques (STEINER, I, p. 356) avec la proposition (II, p. 629) dont voici l'énoncé : « Les tangentes à l'ellipse E, aux pieds des quatre normales issues d'un point P à cette courbe, forment avec les deux axes de l'ellipse six tangentes d'une même parabole »; on aura un point de départ pour la démonstration des propositions 9 et 10.

NOTES. Nous avons cru devoir donner communication de la présente étude à M. A. DROZ-FARNY, auteur de l'importante addition récemment publiée (*Mathesis*, 1896, 193-197). Notre savant correspondant a bien voulu nous signaler des rectifications de détail à y apporter, en même temps que différentes indications bibliographiques utiles à y ajouter. Nous en donnons ci-après un extrait.

1. Les théorèmes 86 et 88 de M. BARISIEN (*Mathesis*, 1895, 246-247) ont été démontrés dans un article intitulé : *Théorèmes relatifs à la parabole*, paru au n° 1 d'octobre 1894 du *Bulletin de Mathématiques spéciales* de M. B. NIEWENGLOWSKI.

2. Pour la propriété 1 (p. 130), voir aussi *Journal de Vuibert*, 11^me^ année, p. 155, et une généralisation de CATALAN (J. M. S., 1887, p. 83).

3. Autre propriété des cercles Σ et Σ' : on considère toutes les paraboles bitangentes à une ellipse et ayant leurs foyers sur l'ellipse. Le lieu du point d'intersection des tangentes aux points de contact se compose des cercles Σ et Σ'. (CH. MICHEL, *Bulletin de Niewenglowski*, année 1894-1895, p. 116).

4. Les propriétés énoncées au § 12 ($a, b, \ldots o, p$) sont valables pour un triangle quelconque.

5. La plupart des propriétés des triangles T ont été démontrées géométriquement dans la solution, par M. DROZ-FARNY, de la question 937 (Voir *Mathesis*, 1895, 258-260).

6. Le produit des diamètres de l'ellipse E parallèles aux côtés du triangle T est constant (*loc. cit.*, p. 260). M. DROZ-FARNY ajoute que cette constante est égale à $16\,\frac{a^2b^2}{a+b}$.

7. La plupart des théorèmes de STEINER (*Vermischte Sätze und Aufgaben*, t. II, p. 663) sont démontrés dans la thèse doctorale : *Ueber einem Dreieck um- und eingeschreibene Kegelschnitte* (sur les coniques inscrites et circonscrites à un triangle), par KARL DÖRHOLT, 1884.

Digitized by Google

SUPPLÉMENT. Pour abréger les recherches bibliographiques, nous croyons utile de reproduire ici les principaux énoncés de questions des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, dont il a été fait mention au début du présent article.

1101. a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe, ayant respectivement pour rayons $a+b$ et $a-b$. Si d'un point quelconque de l'un d'eux on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle. (J. BRUNO.)

1112. Le rayon de courbure en un point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la différence de ses axes pour rayon. (DE POLIGNAC.)

1114. Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent, sur toute normale à l'ellipse, des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression. (DE POLIGNAC.)

1115. Montrer que l'on peut placer une infinité d'ellipses concentriques et co-axiales à une ellipse donnée, jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être considérés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série. (DE POLIGNAC.)

1116. Deux ellipses quelconques de la série interceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant. (DE POLIGNAC.)

1212. Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune de ces droites on prend à partir du point m et des deux côtés de ce point des segments mM, mM' égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points M, M' sont des circonférences concentriques à l'ellipse dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe. (J. BRUNO.)

BIBLIOGRAPHIE; PUBLICATIONS RÉCENTES.

G. LAZZERI e A. BASSANI, Professori nella R. Accademia Navale. **Elementi di Geometria.** Con 312 figure intercalate Seconda edizione migliorata. Livorno, Giusti, 1898 (XVI-380 p. in-8°). Prix : 5 lire.

Dans la géométrie de MM. Lazzori et Bassani, les parties correspondantes de la planimétrie et de la stéréométrie sont rapprochées, ce qui est contraire aux programmes officiels italiens; malgré cela, leur livre a fait son chemin dans le monde de l'enseignement, sans doute à cause de sa valeur scientifique et pédagogique.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1891 et a été annoncée dans *Mathesis* (1891, p. 274); la seconde dont nous venons de transcrire le titre contient quelques améliorations de détail surtout sur des questions de principes ; on

Digitized by Google

n'y a plus reproduit un certain nombre de questions qui ne sont pas enseignées dans les collèges (volume et surface du tore; théorie des centres, des axes et des plans radicaux et des centres de similitude).

Traité d'algèbre élémentaire à l'usage de l'enseignement moyen, par E. COLART, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Huy. 2e édition, Bruxelles, A. CASTAIGNE, 1898 (330 pp. in-8°). Prix : fr. 3,75.

La première édition de cet ouvrage a obtenu, en 1894, le prix de Keyn, et le rapport du jury s'exprimait en ces termes: « sans prétendre que le traité soit absolument irréprochable, le jury a jugé qu'il réalise un progrès considérable. »

La deuxième édition contient plusieurs changements. L'auteur a notamment utilisé les remarques de M. De Tilly sur les valeurs principales des radicaux; il a ajouté une théorie des rentes viagères plus scientifique que celle qui se base sur la vie probable; enfin il a introduit, dans les premières pages, quelques questions relatives à l'intérêt, à l'escompte, aux mélanges et aux alliages, afin de se conformer plus exactement au programme des classes inférieures des Athénées. A part une légère réserve à faire sur la définition du titre des alliages, ces changements sont heureux, et le traité qui était déjà très bon, s'approche davantage de la perfection. C'est un manuel qui rendra de grands services dans l'enseignement moyen.

(M. STUYVAERT).

Œuvres scientifiques de L. LORENTZ, revues et annotées par H. VALENTINER (publiées aux frais de la fondation Carlsberg). Tome premier. Deuxième fascicule. Copenhague, Lehman et Staze, 1898.

Ce second fascicule contient les travaux suivants : 1° Recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction (pp. 211-367). 2° Théorie de la dispersion (pp. 369-402). 3° Sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente (403-509). Des notes savantes ajoutées à chaque mémoire par le consciencieux éditeur éclaircissent les points difficiles de l'œuvre du grand physicien danois. Grâce à cette belle publication, en français, les recherches sur l'optique du digne émule de MAXWELL sont mises à la portée de tous ceux qui s'intéressent à la philosophie naturelle.

Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, par G. DARBOUX, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences, Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. Tome I. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 (IV-338 pages, gr. in-8°). Prix : 10 fr.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée de ces savantes leçons qu'en en publiant la courte préface et la table des matières.

« L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier volume, dit M. Darboux, est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches,

Digitized by Google

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication. »

Sommaire du tome I. LIVRE I. *L'équation du troisième ordre.* — Chap. I. Les familles de Lamé. Théorème de Dupin et sa réciproque. — Chap. II. Systèmes triples comprenant une famille de plans ou une famille de sphères. — Chap. III. Étude d'une intégrale particulière de l'équation du troisième ordre. — Chap. IV. Formes diverses de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. — Chap. V. Les familles de Lamé formées avec des quadriques. — Chap. VI. Systèmes orthogonaux à n variables. Extension des méthodes précédentes.

LIVRE II. *Les coordonnées curvilignes.* — Chap. I. Systèmes orthogonaux à n variables. — Chap. II. Le trièdre mobile. — Chap. III. Recherche d'un système triple particulier. — Chapitre IV. Recherche d'un système triple particulier (*suite*). Examen du troisième type de solution. — Chap. V. Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur. — Chap. VI. Les systèmes triples de M. Bianchi.

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par L. Lévy, examinateur d'admission et répétiteur d'analyse à l'École polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 (XII-237 p. gr. in-8°). Brux., fr. 7 50.

Sommaire : Chap. I. *Notions préliminaires.* Représentation des quantités imaginaires. Points critiques, fonctions holomorphes, méromorphes, uniformes. — Chap. II. *Des séries* Étude préliminaire d'une fonction holomorphe, périodique de troisième espèce. La fonction θ : périodes, zéros; équation à trois termes. Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 : développements en séries d'exponentielles ou de lignes trigonométriques, changement de signe de l'argument, addition des périodes et des demi-périodes, zéros, relations quadratiques, développements en produits. Exercices. — Chap. III. *Fonctions* σu, $\sigma_\alpha u$, ζu. Définitions : parité, zéros, développement suivant les puissances de u; η_1, η_2, η_3 : addition des périodes et des demi-périodes. Equation à trois termes : formules d'addition. ζu : addition des périodes, parité, formule d'addition. Exercices. — Chap. IV. *Des fonctions elliptiques.* Premier point de vue : pu, double périodicité, parité, racines de la dérivée, introduction de pu dans les formules du Chapitre précédent. Deuxième point de vue : $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$; parité, périodicité, zéros, pôles, relations fondamentales. Première formule d'addition de pu; équation différentielle de pu. Les puissances de pu en fonction linéaire de pu et des dérivées. Deuxième formule d'addition de pu; $\sqrt{pu - e_\alpha}$ est uniforme. Expression de e_α en fonction des θ. Rapprochement entre les différentes constantes. Relation entre pu et $\mathrm{sn}u$. Equa-

Digitized by Google

tions différentielles de $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$. Variation de $\mathrm{p}u$ (valeurs réelles); formule d'homogénéité. Variation de $\mathrm{sn}u$. Exercices. — Chap. V. *Intégration par les formules elliptiques.* Intégration des fonctions qui sont rationnelles par rapport aux fonctions elliptiques. Inversion. Intégrales complètes de Legendre. Exercices. — Chap. VI. *Calculs numériques : usage des Tables.* Calcul de ω_1, ω_2, η_1, η_2 dans les deux cas du discriminant positif et du discriminant négatif. Connaissant u et k, calculer $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$, $\mathrm{p}u$, $\mathrm{p}'u$, ζu et problème inverse. Exercices. — Chap. VII. *Applications mécaniques, géométriques, algébriques.* Exercices. — Chap. VIII. *Deuxième méthode de calcul : emploi des séries* θ. Les constantes K, K', q, ω_1, ω_2, η_1, η_2 Les fonctions $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$, $\mathrm{p}u$, ζu, σu connaissant u, et problème inverse. Mêmes problèmes avec le discriminant négatif. Exercices. — Chap. IX. *Compléments : décomposition en facteurs et en éléments simples; multiplication de l'argument; addition de* $\mathrm{sn}u$. Rappel des théorèmes relatifs à l'intégration le long de contours imaginaires. Application aux fonctions elliptiques; construire une fonction elliptique : 1° connaissant ses pôles et ses zéros; 2° ses pôles et ses parties infinies dans le voisinage de chaque pôle. Multiplication de l'argument pour $\mathrm{p}u$. Deuxième démonstration des formules qui donnent $\mathrm{sn}(u+v)$, $\mathrm{cn}(u+v)$, $\mathrm{dn}(u+v)$.

Notes. I. Réduction de quatre intégrales aux fonctions elliptiques. — II. Dégénérescences. — III. Inversion en quantités réelles par les fonctions de Jacobi. — IV. Application numérique des fonctions elliptiques au mouvement presque vertical des projectiles.

Exercices divers. — Quelques valeurs des fonctions de Jacobi. — Résumé des principales formules. — Comparaison des notations du *Précis* avec celles de quelques Ouvrages. — Tables numériques.

Autant que nous pouvons en juger, le Précis de M. Lévy, plus court que les traités de Halphen, Molk et Tannery, Greenhill, plus pratique que celui d'Appell et Lacour, plus complet que l'ouvrage de Henry, est appelé à un grand succès en France et ailleurs; mais combien il aurait pu être plus élémentaire, si l'auteur avait davantage tenu compte du développement historique de la théorie des fonctions elliptiques. (P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 990.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 264).

Les points P, Q, R, S *divisent respectivement les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un pseudocarré* ABCD *dans un rapport* $\gamma : 1$. *Démontrer que, si* γ *varie,* 1° *le quadrilatère* PQRS *est toujours un pseudocarré*; 2° *les enveloppes des diagonales* PR, QS *sont deux paraboles dont les axes sont rectangulaires*; 3° *le lieu du point d'intersection de* PR *avec* QS *est une strophoïde droite.* (P. H. Schoute.)

Digitized by Google

Solution analytique par M. V. Retali. Prenons pour axes coordonnés les diagonales AOC, BOD et posons $OA = a$, $CO = a'$, $OD = b$, $BO = b'$, $a + a' = b + b' = d$: les coordonnées des points P, Q, R, S sont

$$\begin{cases} x = a\gamma, \\ y = b(1-\gamma); \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(1-\gamma), \\ y = -b'\gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a'\gamma, \\ y = -b'(1-\gamma); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a'(1-\gamma), \\ y = b\gamma; \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\overline{PR}^2 = \overline{QS}^2 = d^2[\gamma^2 + (1-\gamma)^2].$$

En posant $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$, $p = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $q = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, les droites PR, QS ont pour équations

$$(1-\gamma)x - \gamma y = \gamma(1-\gamma)p, \qquad (1)$$
$$\gamma x + (1-\gamma)y = \gamma(1-\gamma)q, \qquad (2)$$

elles sont donc perpendiculaires. Pour trouver leurs enveloppes, nous en écrivons les équations sous la forme

$$p\gamma^2 - (x + y + p)\gamma + y = 0,$$
$$q\gamma^2 + (x - y - q)\gamma + y = 0,$$

et, égalant à zéro les discriminants, nous avons

$$(x + y + p)^2 - 4px = 0,$$
$$(x - y - q)^2 - 4qy = 0 :$$

deux paraboles dont les tangentes aux sommets sont

$$2(x + y) + p = 0,$$
$$2(x - y) - q = 0,$$

c'est-à-dire les *médianes* du pseudo carré ABCD. Les coordonnées du *point-moyen* V sont $\frac{1}{4}\alpha$ et $\frac{1}{4}\beta$. Les deux paraboles ont les paramètres $-p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$, et leurs axes sont les bissectrices des angles des axes coordonnés.

Les coordonnées du point ω commun aux droites (1), (2) sont

$$x = \frac{\gamma(1-\gamma)(p + \gamma\beta)}{\gamma^2 + (1-\gamma)^2}, \quad y = \frac{\gamma(1-\gamma)(q - \gamma\alpha)}{\gamma^2 + (1-\gamma)^2},$$

et si nous posons $t = \dfrac{q - \gamma\alpha}{p + \gamma\beta}$, nous aurons, pour les équations paramétriques du lieu du point ω,

$$x = \frac{(q - pt)(p + qt)}{(\alpha + \beta t)(1 + t^2)}, \quad y = \frac{t(q - pt)(p + qt)}{(\alpha + \beta t)(1 + t^2)}, \qquad (3)$$

Digitized by Google

qui représentent une cubique circulaire avec un point double à l'origine. Les coefficients angulaires des tangentes (orthogonales) au point double sont $\frac{q}{p}$ et $-\frac{p}{q}$; les paramètres des points à l'infini sont $\pm i$, qui correspondent aux points cycliques, et $-\frac{\alpha}{\beta}$ qui donne la direction de l'asymptote réelle; cette asymptote est donc perpendiculaire à la droite

$$\beta x - \alpha y = 0$$

qui unit le nœud avec le *point-moyen* du pseudocarré. Les points à l'infini sont des points stationnaires de la cubique, qui est donc une strophoïde droite.

Si nous voulons l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, il suffit d'éliminer t entre les deux équations (3); nous avons

$$pq(x^2 - y^2) + (q^2 - p^2)xy = (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2)$$

ou bien

$$\tfrac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 - y^2) + \alpha\beta xy = (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2);$$

faisons maintenant tourner les axes d'un angle θ, tel que $\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui revient à prendre pour nouvel axe des abscisses la droite OV; nous aurons

$$x = \xi\cos\theta - \eta\cos\theta,$$

$$y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 - y^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\xi^2 - \eta^2) - 4\alpha\beta\xi\eta,$$

$$\alpha x + \beta y = \xi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)xy = \alpha\beta(\xi^2 - \eta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\xi\eta;$$

et l'équation de la cubique prend la forme

$$(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 4\xi(\xi^2 + \eta^2),$$

équation d'une strophoïde droite avec le point double à l'origine et dont le sommet est le point moyen du pseudocarré donné.

Solution analytique par MM. Barisien, Colart, Klompers, Dépréz et Jonesco.

Solution géométrique par M. Mandart. Soient P′, Q′, R′, S′ les points symétriques des points P, Q, R, S par rapport aux milieux des côtés correspondants. Les figures SP′QR′, S′PQ′R sont des rectangles égaux, car $SP' = \frac{DB}{\gamma + 1}$, $PQ' = \frac{AC}{\gamma + 1}$; de même $P'Q = Q'R$.

Digitized by Google

De plus, les côtés égaux sont perpendiculaires chacun à chacun, donc SQ est égal et perpendiculaire à PR, ce qui prouve que PQRS est un pseudocarré.

2° Soient G le point d'intersection de AC avec BD; I, H les points de rencontre de PR avec les diagonales AC, BD.

Le triangle AGB coupé par la droite PHI donne

$$\frac{AP \times BH \times GI}{PB \times GH \times AI} = 1, \quad \text{ou} \quad \gamma \times \frac{BH}{AI} \times \frac{GI}{GH} = 1.$$

Les triangles GIH, P'SQ ayant leurs côtés perpendiculaires, on a aussi

$$\frac{GI}{GH} = \frac{SP'}{P'Q} = \frac{DB}{\gamma+1} : \frac{AC.\gamma}{\gamma+1} = \frac{1}{\gamma}.$$

Donc BH = AI, et la ligne PR intercepte ainsi sur les côtés BG, AG des segments égaux BH, AI. Par suite, le point K, milieu de HI, décrit la droite EE' parallèle à la bissectrice de AGB et joignant les milieux E, E' des côtés AB, CD.

PR enveloppe donc une parabole, dont le foyer est un point F symétrique de G par rapport à EE', et dont cette dernière droite est la tangente au sommet; GF, bissectrice de BGC, est donc l'axe (*Mathesis*, (1) I, p. 31).

On démontrerait de même que SQ enveloppe une seconde parabole dont l'axe est la bissectrice de l'angle AGB, donc perpendiculaire à GF.

3° Soient ω le point d'intersection des diagonales PR, SQ; L, le milieu de EE'; K', le point d'interersection de QS avec la ligne VV' joignant les milieux des côtés BC et AD; F', le foyer de la parabole enveloppe de QS (F' est le symétrique de G par rapport à VV'); M, le point de rencontre de FK avec le cercle KOK'L.

La ligne K'F' passe par M; car cette droite, parallèle à OK, est perpendiculaire à FK.

Les angles LKM, LK'M étant égaux, il en sera de même de leurs symétriques LKG, LK'G; ce qui prouve que G se trouve sur le cercle KOK'LM.

Menons au point G une perpendiculaire GN à GL, soit N le point de section de cette perpendiculaire avec OL.

L'angle OGL est égal à $\pi - OKL = \frac{1}{2}\pi + LKM = \frac{1}{2}\pi + LOG$; il est aussi égal à $\frac{1}{2}\pi + OGN$; donc LOG = OGN.

O décrit donc une strophoïde droite de sommet L et de point double G.

Solution analogue par M. BUISSERET.

Digitized by Google

Question 1112.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 80).

On mène une corde AB *d'un cercle donné, et* AC *égale et perpendiculaire à* AB. *La droite* BC *rencontre le diamètre* AA′ *au point* D, *qu'on projette en* E *sur* AB. *Cela posé, trouvez les lieux des points* C *et* E : 1° *lorsque* A *est fixe;* 2° *lorsque* B *est fixe.*

(J. Jonesco).

Solution par M. V. Retali. 1° Le lieu du point C est (fig. 1) évidemment *le cercle égal au cercle donné, qui le coupe orthogonalement en* A. Si F est l'autre point commun aux deux cercles, AF est un côté d'un carré inscrit AFA′G, et la droite BC tourne autour du point F.

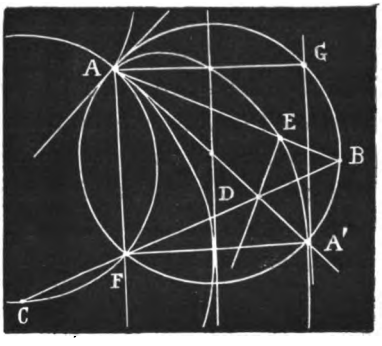


Fig. 1.

Les faisceaux A(B...), F(B...) étant égaux, la ponctuelle marquée par D sur la droite AA′ est projective au faisceau A (B...) : l'enveloppe de la droite DE est donc la parabole ayant F pour foyer et A′G pour directrice. Le lieu du point E est par conséquent la podaire de cette parabole par rapport à son point A; c'est-à-dire *une cubique circulaire cuspidale ayant son rebroussement en* A *et la tangente en* A, *au cercle donné, pour tangente cuspidale*. Elle passe par A′, par le milieu du segment AG et par le point à l'infini de la directrice A′G, ce qui la détermine complètement(*).

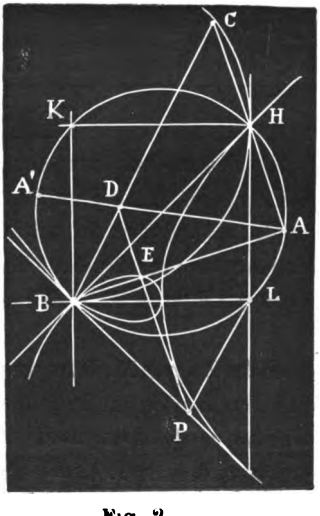


Fig. 2.

2° Si H est, sur le cercle donné, le point opposé à B (fig. 2), inscrivons le carré BLHK; suivant que BA tombe dans l'angle LBP ou non, on voit immédiatement que l'angle BCH = 135° ou 45°;

(*) La cubique a pour tangente en A′ la droite A′G et pour asymptote réelle la tangente à la parabole en son sommet. (V. R.).

Digitized by Google

et par suite *le lieu du point* C *est le cercle ayant le centre* K *et le rayon* BK.

Lorsque BA tourne autour du point B, LA coupe le tangente en B au cercle donné en un point P qui marque sur cette tangente une ponctuelle projective au faisceau B (A...) : l'enveloppe de la perpendiculaire menée par P sur BA est une parabole P^2 ayant le foyer L et la directrice BK. Cela posé, BC est parallèle à AL, le quadrilatère ADBP est un trapèze isoscèle et ses diagonales DP, AB se coupent à angle droit en E (car $DAB + ABP = 90°$) : Le lieu du point E est donc la podaire de la parabole P^2 par rapport au point B de la directrice (sur l'axe), c'est-à-dire une focale à nœud, et précisément *la strophoïde ayant en* B *son nœud; le sommet est le milieu des segments* BL.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Degueldre, Colart, Andrien, Soons, Déprez En prenant pour axe polaire ou axe des x le diamètre mené par A ou par B, pour origine A ou B, ils ont trouvé pour équations du lieu décrit par E :

1° $$\rho = \frac{2R\cos^2\omega}{\sin\omega + \cos\omega}, \quad (x^2+y^2)(x+y) = 2Rx^2;$$

2° $$\rho = \frac{2R\sin\omega\cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega}, \quad (x^2+y^2)(x+y) = 2Rxy.$$

Question 1126.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 151).

On donne deux axes rectangulaires. Un cercle de rayon donné coupe OX *en* A *et* A', OY *en* B *et* B'. *Ce cercle se déplace de manière que la corde* AB *conserve la même longueur. On demande* : 1° *Le lieu du point de rencontre des droites* AB *et* A'B'. 2° *Le lieu du point de rencontre des droites* AB' *et* A'B. 3° *Le lieu du centre de ce cercle.*

(E. Romieux).

Solution par M. Barisien. La solution de cette question est rendue des plus faciles par la connaissance du théorème suivant, assez connu : *Si deux cordes d'un cercle,* AA' *et* BB' *se coupent perpendiculairement en* O, *on a,* R *étant le rayon du cercle,*

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = 4R^2.$$

Il en résulte donc que si AB a une longueur constante a, la droite A'B' a aussi une longueur constante b, telle que $a^2 + b^2 = 4R^2$.

Digitized by Google

Par conséquent, chacune des droites AB et A'B' enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

1° Soit maintenant φ l'angle variable BAO. On a, par suite,

$$OA = a\cos\varphi, \quad OB = a\sin\varphi, \quad OA' = -b\sin\varphi, \quad OB' = -b\cos\varphi.$$

Les équations des droites AB et A'B' sont :

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = a, \quad \frac{y}{\cos\varphi} + \frac{x}{\sin\varphi} = -b.$$

On en tire

$$\cos\varphi = \frac{x^2 - y^2}{ax + by}, \quad \sin\varphi = -\frac{(x^2 - y^2)}{bx + ay}.$$

L'équation du lieu du point de rencontre des droites AB et A'B' est donc

$$(x^2 - y^2)^2\left[\frac{1}{(ax + by)^2} + \frac{1}{(bx + ay)^2}\right] = 1.$$

Ce lieu est une courbe du 6^{me} degré.

2° Les équations des droites AB' et A'B sont

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \cos\varphi, \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = -\sin\varphi.$$

Le lieu du point de rencontre de ces droites a donc pour équation

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b} - \frac{y}{a}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

C'est une ellipse ayant son centre en O.

3° Le centre C du cercle est le troisième sommet d'un triangle ABC dont les sommets A et B se déplacent sur les droites fixes OX, OY. On sait que le lieu de ce point est une ellipse.

Si on désigne par α l'angle CAB, qui satisfait aux égalités $\cos\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\alpha = \frac{b}{2R}$, les coordonnées x et y de C ont pour expression

$$x = a\cos\varphi - R\cos(\varphi - \alpha), \quad y = R\sin(\varphi - \alpha)$$

ou, en posant $\varphi - \alpha = \psi$,

$$x = a\cos(\psi + \alpha) - R\cos\psi, \quad y = R\sin\psi.$$

Éliminant ψ entre ces deux équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on trouve pour l'équation du lieu, l'ellipse

$$(2R^2x + aby)^2 + (y^2 - R^2)(a^2 - 2R^2)^2 = 0.$$

Digitized by Google

Remarque. Le cercle mobile peut occuper par rapport à la corde AB deux positions symétriques; par suite, chacun des lieux considérés se compose de deux courbes.

Ont résolu la même question MM. Degueldre, Soons, Audibert et Déprez.

×Question 1134.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 212).

Résoudre le système d'équations

$$\sin x = a \sin (y + z), \quad \sin y = b \sin (x + z), \quad \sin z = c \sin (x + y).$$

(Neuberg).

Solution par M. Audibert. Développant les seconds membres et éliminant tour à tour x, y et z on obtient les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} c\,(ab - 1)\sin^2 y - b\,(ac - 1)\sin^2 z = 0, \\ c\,(ab - 1)\sin^2 x - a\,(bc - 1)\sin^2 z = 0, \\ b\,(ac - 1)\sin^2 x - a\,(bc - 1)\sin^2 y = 0. \end{cases}$$

Chacune d'elles est la conséquence des deux autres; mais si l'on introduit dans une des équations données, la dernière par exemple, les valeurs de sin x et de sin y en fonction de sin z, tirées de (1), on a

$$\left(\frac{ab - 1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = (a\,(bc - 1))^{\frac{1}{2}} \cos y + [b\,(ac \quad 1)]^{\frac{1}{2}} \cos x.$$

D'autre part, la dernière relation de (1) peut s'écrire

$$[b\,(ac - 1)\cos^2 x - (a - b)]^{\frac{1}{2}} = [a\,(bc - 1)]^{\frac{1}{2}} \cos y$$

et l'élimination de cos y donne finalement

$$\cos x = \frac{ab + ac - bc - 1}{2\,[bc\,(ab - 1)\,(ac - 1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

On aurait de même

$$\cos y = \frac{ab + bc - ac - 1}{2\,[ac\,(ab - 1)\,(bc - 1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos z = \frac{ac + bc - ab - 1}{2\,[ab\,(ac - 1)\,(bc - 1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Solution par M. Lefèvre (Liége). Posons $x + y + z = s$; la première équation devient

$$\sin x = a \sin (s - x) = a\,(\sin s \cos x - \cos s \sin x).$$

Digitized by Google

De là :

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin s}{1 + a \cos s}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{b \sin s}{1 + b \cos s}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{c \sin s}{1 + c \cos s}$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} s - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x},$$

on trouve

$$\cos s = \frac{1 - (ab + bc + ca)}{2abc},$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{4a^2b^2c^2 - (1 - ab - bc - ca)^2}}{1 - ab - ac + bc}.$$

Autre solution. Posons

$$x + y + z = 2s,$$
$$-x + y + z = 2s_1, \quad x - y + z = 2s_2, \quad x + y - z = 2s_3;$$

la première équation prendra la forme

$$\frac{\sin x}{\sin (y + z)} = \frac{a}{1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg} s}{\operatorname{tg} s_1} = \frac{1 + a}{1 - a}.$$

On voit que le système proposé devient

$$\operatorname{tg} s_1 = \alpha \operatorname{tg} s, \quad \operatorname{tg} s_2 = \beta \operatorname{tg} s, \quad \operatorname{tg} s_3 = \gamma \operatorname{tg} s,$$

α, β, γ désignant des nombres connus. On a aussi

$$s = s_1 + s_2 + s_3;$$

d'où

$$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg} s_1 + \operatorname{tg} s_2 + \operatorname{tg} s_3 - \operatorname{tg} s_1 \operatorname{tg} s_2 \operatorname{tg} s_3}{1 - \operatorname{tg} s_1 \operatorname{tg} s_2 - \operatorname{tg} s_2 \operatorname{tg} s_3 - \operatorname{tg} s_3 \operatorname{tg} s_1}.$$

Par conséquent, en supprimant la solution $\operatorname{tg} s = 0$, on a :

$$1 = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma \cdot \operatorname{tg}^2 s}{1 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \operatorname{tg}^2 s},$$

$$\operatorname{tg}^2 s = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{1 - \alpha - \beta - \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1};$$

on peut donc calculer $\operatorname{tg} s_1$, $\operatorname{tg} s_2$, $\operatorname{tg} s_3$.

Connaissant s_1, s_2, s_3, on a : $x = s_2 + s_3$, etc. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 1136.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 214).

Les circonférences décrites sur les diagonales AC, BD ***d'un quadrilatère*** ABCD ***se coupent en deux points*** ω, ω'. ***Démontrer que les projections de l'un de ces points sur deux côtés opposés et les diagonales sont situés sur une même circonférence.*** (A. C.)

Solution par MM. Emmerich *et* Fairon (Seraing). Soient M, N, P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de ω sur AB, CD, AC, BD; on a

$$\begin{aligned}\text{angle MPN} &= \text{MP}\omega + \text{NP}\omega\\ &= \pi - \text{BA}\omega + \text{DC}\omega\\ &= \text{A}\omega\text{B} + \text{AB}\omega + \text{DC}\omega\\ &= \tfrac{1}{2}\pi - \text{B}\omega\text{C} + \text{AB}\omega + \text{DC}\omega;\\ \text{angle NQM} &= \text{NQ}\omega + \text{MQ}\omega\\ &= \pi - \text{CD}\omega + \text{AB}\omega\\ &= \text{C}\omega\text{D} + \text{DC}\omega + \text{AB}\omega\\ &= \tfrac{1}{2}\pi - \text{B}\omega\text{C} + \text{DC}\omega + \text{AB}\omega.\end{aligned}$$

Donc angle MPN = MQN, *c. q. f. d.*

M. Fairon observe que la proposition est encore vraie lorsque les projetantes font un angle donné α avec les droites sur lesquelles on projette.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1161. Deux triangles ABC, A'B'C' sont inscrits à une même circonférence. 1° Les droites de Simson de ces triangles par rapport à un point quelconque de la circonférence se coupent sous un angle constant; 2° l'intersection de ces droites décrit une conique; 3° chercher les cas où cette conique dégénère. (Droz Farny.)

1162. Un bâton formé de deux branches rectilignes AC, CB, comprenant un angle donné ACB, est plongé dans l'eau à partir du point C. L'œil d'un observateur étant placé au point A, on demande le lieu des positions apparentes de l'extrémité B lorsque le bâton, affleurant dans l'eau en C, tournera autour de AC comme axe.

On se donnera les longueurs AC, CB, l'inclinaison i de AC, et l'indice de réfraction n du milieu réfringent.

Cas particuliers et vérifications. (H. Brocard.)

Digitized by Google

***1163.** On considère deux cercles tangents en O et dont les extrémités des diamètres passant par O sont A et B. Une sécante mobile passant par O rencontre le cercle OA en A′ et le cercle OB en B′. Le lieu du point de rencontre des droites AB′ et BA′ est un cercle.

(E. N. Barisien).

***1164.** On mène par les sommets A, B, C d'un triangle équilatéral trois droites passant par un point M et faisant les angles α, β, γ avec les côtés opposés. Démontrer les relations

$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)=0.$$

(Stanham).

Quelle est la relation analogue dans un triangle rectiligne ou sphérique quelconque?

QUESTIONS D'EXAMEN.

824. Construire le triangle ABC, connaissant : 1° les centres I, I′ du cercle inscrit et du cercle ex inscrit qui touche intérieurement le côté BC; 2° le rapport $m:n$ des rayons de ces cercles; 3° la hauteur h_a abaissée de A sur BC.

Le sommet A et le point de rencontre D de BC avec II′ divisent II′ additivement et soustractivement dans le rapport $m:n$. On obtient BC en menant par D une tangente au cercle décrit de A comme centre avec le rayon h_a, etc.

825. Résoudre les équations

$$(24m^2+8m+1)\,x+(15m^2+8m+1)\,y+3m^2=0,$$
$$(8m+2)\,x+(5m+1)\,y-m=0,$$

dans lesquelles m désigne un nombre donné.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les équations forment un système impossible ou indéterminé.

Étudier les variations de y et du produit xy lorsque m croît de $-\infty$ à $+\infty$.

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles. — 1897*).

826. Les égalités

$$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$$

entraînent $xyz=0$. (*Journal de Vuibert.*)

Des relations

$$x+y+z=1,\quad x^2+y^2+z^2=1,$$

on déduit

$$xy+yz+zx=0.$$

Digitized by Google

On a l'identité

$$x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz = \Sigma x\,(\Sigma x^3 - \Sigma xy);$$

par suite, $xyz = 0$.

827. Vérifier que dans tout triangle ABC :

$$\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - 1\right).$$

828. Pour toutes les valeurs de A, B, C, D :

$$\Sigma \sin A = 2\Sigma \cos\frac{A}{2}\,\Sigma \sin\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A+B+C+D}{4} \times$$
$$\left\{\cos\frac{A+B-C-D}{4} + \cos\frac{A+C-B-D}{4} + \cos\frac{A+D-B-C}{4}.\right\}$$

829. Sur la demi-circonférence ABC on prend deux arcs égaux BD, BE et l'on mène les droites AB, AD,... ; démontrer que

$$\left(\frac{AD+AE}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AD-AE}{CB}\right)^2 = 4.$$

(MITCHESON.)

830. Soient AB, CD deux cordes rectangulaires passant par le point de rebroussement O d'un limaçon de Pascal. On a

$$OA.\,OB + OC.\,OD = \text{const.}$$

(E. N. BARISIEN.)

En effet, si OE et OF sont les cordes correspondantes du cercle directeur, l'égalité revient à

$$(OE + b)(OE - b) + (OF + b)(OF - b) = \text{const. etc.}$$

831. En un point M d'une parabole on mène la normale qui rencontre l'axe en N. On prolonge MN de NP = MN. Le lieu du point P est une parabole. (E. N. BARISIEN.)

Si x, y sont les coordonnées de M, celles de P sont $x + 2p$, $-y$; le lieu de P est donc la parabole primitive glissant parallèlement à son axe de la quantité $2p$. — P est le *point de Frégier* relatif à M ; car si M' est le symétrique de M par rapport à l'axe et que Q est le point à l'infini sur le diamètre passant par M, P est sur l'hypoténuse du triangle rectangle inscrit M'MQ.

Digitized by Google

*RÉSOLUTION HYDROSTATIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ,

par M. DEMANET, ingénieur.

1. Le volume d'un cône étant donné par la formule $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, on peut construire un récipient conique A dans lequel

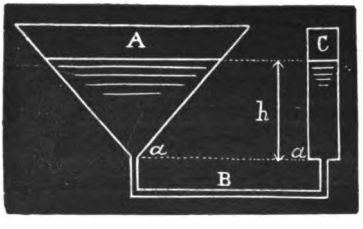
$$r = h\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Un volume de liquide remplissant une hauteur h de ce récipient A sera donc égal à

$$\left(h\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)^2 \times \frac{\pi h}{3} = h^3.$$

Supposons que ce récipient A soit relié par un tube B à un autre récipient cylindrique C ayant pour base 1 centimètre carré.

Ces deux vases communiquants vont nous permettre de trouver très facilement la racine réelle de l'équation $z^3 + pz = q$, p et q étant positifs.



En effet, si nous divisons toutes les racines de cette équation par $\sqrt{p}$, en posant $z = x\sqrt{p}$, elle prend la forme

$$x^3 + x = k,$$

k pouvant être fractionnaire ou irrationnel, ce qui est sans importance, vu qu'on pourra le calculer avec telle approximation que l'on veut.

Si nous mesurons dans une burette graduée k centimètres cubes d'un liquide et si nous versons ces k centimètres cubes dans un des deux vases communiquants (après avoir au préalable rempli de liquide le tube B jusqu'au niveau aa de façon à annuler l'influence de ce tube), le liquide s'élèvera dans les deux vases à une hauteur commune h centimètres au-dessus de la ligne aa et h sera la solution de l'équation $x^3 + x = k$; car la somme des volumes compris dans les 2 vases A et C est égale à k cm^3 et ces volumes étant respectivement h^3 cm^3 et h cm^3 nous pourrons écrire $h^3 + h = k$.

Nous aurions aussi pu obtenir directement la solution de $z^3 + pz = q$, si p est entier; mais il aurait alors fallu p vases C en communication avec

Digitized by Google

le vase A et dans ces $p+1$ vases communiquants, on aurait versé q centimètres cubes. La hauteur du liquide dans les $p+1$ vases exprimée en centimètres, aurait donné la solution de l'équation

$$z^3 + pz = q.$$

2. Si l'équation était de la forme

$$z^3 - pz = q,$$

l'appareil serait un peu différent.

Soit encore un récipient conique D identique au récipient A du problème précédent, c'est-à-dire que le volume remplissant une hauteur h centimètres cubes est de h^3 centimètres cubes.

On introduit dans ce récipient conique une pièce solide composée d'une partie supérieure cylindrique d'un centimètre carré de section et d'une base conique d'un centimètre de hauteur s'emboîtant exactement sur le fond du cône D. Le volume de cette base conique sera d'un centimètre cube. Le volume de h centimètres de hauteur de la pièce solide E sera donc de h centimètres cubes.

L'équation donnée étant mise sous la forme

$$x^3 - x = k,$$

il suffira pour en obtenir une racine, de verser k centimètres cubes de liquide dans le récipient D contenant déjà la pièce solide. La hauteur h centimètres que prendra le liquide dans le vase D donnera la solution de

$$x^3 - x = k$$

car le volume total h^3 diminué du volume du solide h est k centimètres cubes :

$$h^3 - h = k.$$

3. D'une façon générale, on peut toujours construire un récipient R_n de révolution autour d'un axe vertical dont les courbes de section par l'axe soient telles que pour une hauteur de liquide h le volume soit h^n. Un tel récipient servira à matérialiser un terme x^n d'une équation.

Pour matérialiser un terme mx^n, il suffira de m vases R_n. De cette façon, une racine réelle de toute équation de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots = K.$$

A, B, ..., K étant entiers positifs, sera donnée par la hauteur commune que le liquide atteindra en versant K centimètres de liquide dans les

Digitized by Google

vases communiquants qui seraient : 1 récipient R_m, A récipients R_{m-1}, B récipients R_{m-2}.., etc.

SUR LES RELATIONS DE PTOLÉMÉE ET DE FEUERBACH(*);

par M. A. KRAHÉ, professeur à Madrid.

Nous nous proposons d'établir, d'une manière simple, les relations de Ptolémée et de Feuerbach, sous la forme présentée par Cayley.

Relation de Ptolémée.

1. *Lemme I.* Considérons quatre points 1, 2, 3, 4 sur une même circonférence. Soit a le point où la droite 13 rencontre la droite 24. On aura pour un point x quelconque de l'espace (relation de Stewart)(**).

$$(x1).a3 + (x3).1a + (xa).(-13) = 1a.a3.13,$$
$$(x2).a4 + (x4).2a + (xa).(-24) = 2a.a4.24,$$

(ik) ou (ki) représentant le carré de la distance de deux points i, k.

Pour éliminer (xa), comme on a $1a.a3 = 2a.a4$, il suffit de retrancher de la première relation, multipliée par 24, la seconde multipliée par 13. Il vient :

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) + \delta(x4) = 0, \qquad (1)$$

α, β, γ, δ désignant des constantes proportionnelles, comme il est facile de le voir, aux aires des triangles 234, 341, 412, 123 prises avec des signes alternés.

2. *Relation entre les distances de quatre points sur une même circonférence.* Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3, 4. La relation (1) donnera

$$\alpha(11) + \beta(12) + \gamma(13) + \delta(14) = 0$$
$$\alpha(21) + \beta(22) + \gamma(23) + \delta(24) = 0$$
$$\alpha(31) + \beta(32) + \gamma(33) + \delta(34) = 0$$
$$\alpha(41) + \beta(42) + \gamma(43) + \delta(44) = 0.$$

(*) La lecture de la communication faite par M. P. Mansion à la *Société scientifique de Bruxelles*, le 3 avril 1895, m'a suggéré cet article. Voir *Mathesis*, décembre 1897. Supplément.

(**) CHASLES, dans sa *Géométrie supérieure*, p. 231, écrit cette relation ainsi

$$\frac{\overline{am}^2}{ab.ac} + \frac{\overline{bm}^2}{ba.bc} + \frac{\overline{cm}^2}{ca.cb} = 1, \text{ ou } \overline{am}^2.bc + \overline{bm}^2.ca + \overline{cm}^2.ab + ab.bc\ ca = 0.$$

Digitized by Google

On déduit de là, à cause de $(ii) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ (21) & 0 & (23) & (24) \\ (31) & (32) & 0 & (34) \\ (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix} = 0 (*)$$

ce qui est la relation cherchée.

Relation de Feuerbach.

3. *Lemme* II. Considérons cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sur une même sphère. Il est toujours possible, d'en choisir trois, par exemple 1, 2, 3, qui déterminent un cercle ayant avec le cercle 345 un point commun a autre que 3.

On aura (*lemme* I), x étant un point quelconque de l'espace,

$$\alpha (x1) + \beta (x2) + \gamma (x3) + \delta (xa) = 0,$$
$$\alpha' (x3) + \beta' (x4) + \gamma' (x5) + \delta' (xa) = 0,$$

d'où, en éliminant (xa),

$$A (x1) + B (x2) + C (x3) + D (x4) + E (x5) = 0; \qquad (2)$$

A, B, C, D, E étant des constantes.

4. *Relation entre les distances de cinq points situés sur une même sphère.* Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3, 4, 5. L'élimination de A, B, C, D, E donnera

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (21) & 0 & (23) & (24) & (25) \\ (31) & (32) & 0 & (34) & (35) \\ (41) & (42) & (43) & 0 & (45) \\ (51) & (52) & (53) & (54) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est la relation cherchée.

(*) Cette démonstration est due à M. Antomari (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 462). Cayley emploie la multiplication de deux déterminants. (J. N.).

Digitized by Google

QUELQUES PROPRIÉTÉS TRIGONOMÉTRIQUES DES QUADRILATÈRES GAUCHES;

par M. J. Wastеels, professeur à l'Athénée royal de Gand.

I. Considérons trois droites de l'espace auxquelles nous attribuons des directions positives; nous appellerons *angle trièdre de ces droites* le trièdre obtenu en menant par un point quelconque de l'espace des demi-droites parallèles à ces directions.

II. Soit un quadrilatère gauche(*) dont les côtés AB, BC, CD, DA seront désignés respectivement par a, b, c, d; la direction de ces côtés sera celle dans laquelle il faut les parcourir pour se transporter de A en B, de B en C, de C en D et de D en A.

Construisons l'angle trièdre des trois droites a, b, c et nommons α l'angle des parallèles à b et c, β celui des parallèles à c et a, γ celui des parallèles à a et b.

Nous aurons

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha.$$

III. Laissant b, α, β, γ constants, déterminons a et c de manière que la valeur de d soit minima; nous obtenons

$$a = \frac{b(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)}{\sin^2\beta}, \tag{1}$$

$$c = \frac{b(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)}{\sin^2\beta}. \tag{2}$$

Si δ est le minimum de d, nous aurons

$$\delta = \frac{2b\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}}{\sin\beta}. \tag{3}$$

δ désigne la longueur de la perpendiculaire commune aux droites AB et CD ou leur plus courte distance, et les valeurs de a et c déterminent les pieds de cette perpendiculaire commune par rapport aux points B et C: suivant que a est positif ou négatif, cette perpendiculaire rencontre AB du même côté du point B que A ou du côté opposé. On peut faire une observation analogue pour c.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Digitized by Google

IV. On appelle *sinus de l'angle trièdre* ayant pour faces α, β, γ, l'expression

$$\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha) \sin(p-\beta) \sin(p-\gamma)}.$$

Cette expression ne change pas de valeur, si certaines arêtes du trièdre sont remplacées par leurs prolongements.

Nous désignerons le sinus de l'angle trièdre des droites a, b, c par $\sin(a, b, c)$.

La formule (3) deviendra alors :

$$\delta = \frac{2b \cdot \sin(a, b, c)}{\sin \beta}. \tag{4}$$

Cette formule donne la plus courte distance des deux droites a et c, en fonction de l'*angle de ces droites, des angles qu'une troisième droite qui les rencontre forme avec elles et de la longueur de la portion de cette 3e droite comprise entre les deux premières.*

V. Dans le quadrilatère gauche considéré plus haut, nous pouvons, pour trouver la plus courte distance des côtés a et c, employer la formule (4) ou bien celle que nous obtenons en y remplaçant b par d ; alors, nous trouvons :

$$\delta = \frac{2d \cdot \sin(a, d, c)}{\sin \beta}.$$

Il en résulte

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin(a, d, c)}{\sin(a, b, c)}. \tag{5}$$

VI. Désignons les diagonales AC et BD du quadrilatère gauche respectivement par e et par f. En considérant le quadrilatère gauche ACBD, formé par les deux diagonales et par les côtés AD et BC, nous arrivons alors aux formules suivantes :

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin(e, d, f)}{\sin(e, b, f)}, \tag{6}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{\sin(b, f, d)}{\sin(b, e, d)}. \tag{7}$$

Dans le quadrilatère gauche ACDB, nous aurons de même :

$$\frac{e}{f} = \frac{\sin(a, f, c)}{\sin(a, e, c)}. \tag{8}$$

Digitized by Google

Des formules (5) et (6), nous déduisons :

$$\frac{\sin(a, d, c)}{\sin(a, b, c)} = \frac{\sin(e, d, f)}{\sin(e, b, f)}$$

et de (7) et (8) :

$$\frac{\sin(b, f, d)}{\sin(b, e, d)} = \frac{\sin(a, f, c)}{\sin(a, e, c)}.$$

Nous trouverions de la même manière :

$$\frac{\sin(b, a, d)}{\sin(b, c, d)} = \frac{\sin(e, a, f)}{\sin(e, c, f)}.$$

VII. Reprenons le quadrilatère gauche défini au n° II et supposons droits les angles A et D; soient toujours α l'angle de b et c, β celui de c et a, γ celui de a et b; AD étant alors la perpendiculaire commune aux côtés a et c, ceux-ci seront donnés par les formules (1) et (2). Ces formules pourraient s'obtenir directement en projetant le contour du quadrilatère gauche successivement sur les côtés a et c, égalant les projections obtenues à zéro et résolvant le système ainsi obtenu par rapport à a et c.

Des valeurs de a et de c, nous tirons la relation suivante :

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

×5. *Sur l'inverseur de Hart*, d'après M. Mannheim (*Messenger of Mathematics*, nov. 1896, p. 151). Soit ACBD un quadrilatère tel que AD = CB, AB = CD. Soit PQRS une parallèle à AC coupant AD, DC, AB, CB respectivement en P, Q, R, S. La circonférence passant par A, C, Q passera par R; soit I son point d'intersection avec AD. On aura DI.DA = DQ.DC; le point I sera fixe, si l'on déforme le quadrilatère, pourvu que P, Q, R, S soient des points fixes sur les lignes AD, DC, AB, CB. On a donc PQ.PR = PI × PA = *constante*. C'est la propriété fondamentale de l'inverseur de Hart.

Digitized by Google

×6. *Rectification approchée de la circonférence.* — I. Considérons une circonférence de rayon 1. La somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits a pour expression

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}1462;$$

elle est donc égale à la demi-circonférence, avec une erreur par excès moindre qu'un demi-centième.

II. Prenons sur la demi-circonférence terminée au diamètre AB une corde AC égale au plus grand segment de AB divisé en moyenne et extrême raison; la corde BC sera sensiblement égale au quart de la circonférence. En effet,

$$BC=\sqrt{4-(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}=1{,}5723.$$

(E. Sanchis Barrachina.)

III. Élevons par le centre O une perpendiculaire OH sur le diamètre AB, égale à la corde du quadrant; prenons sur la demi-circonférence située du même côté que OH, une corde BD égale au rayon, puis à la suite (dans le même sens) une corde DF égale à la distance DH; la corde BF est sensiblement égale au quart de la circonférence. Cette construction a été indiquée par Mascheroni. Pour la démontrer, observons que le quadrilatère ABDF donne, en posant $BF=x$, $DF=a$:

$$x.AD=2a+\sqrt{4-x^2}.$$

Or $AD=\sqrt{3}$, $a^2=\overline{DH}^2=\frac{1}{4}+(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2=3-\sqrt{6}$; par conséquent,

$$x\sqrt{3}-2\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{4-x^2},$$

$$x=\frac{\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}=1{,}571.$$

7. *Propriétés des coniques*, par M. Cazamian. Etant donnés une conique S et trois points A, B, C dans son plan, les polaires de ces trois points par rapport à la conique déterminent un triangle A'B'C' (triangle réciproque de ABC). On sait que ces deux triangles sont homologiques. Soit D le centre d'homologie, c'est-à-dire le point de concours des droites joignant les sommets correspondants AA', BB', CC'.

1° Les quatre points A,B,C,D, forment un groupe tel que l'un quel-

Digitized by Google

conque d'entre eux est le centre d'homologie du triangle formé par les trois autres et de son réciproque. Les points A′, B′, C′, D, forment un semblable groupe.

2° Les diagonales et les côtés opposés du quadrilatère ABCD sont des droites conjuguées par rapport à la conique.

3° Appelant groupe homologique un groupe de points tels que A,B.C,D, on trouve que, par ces quatre points, on peut faire passer une infinité de coniques harmoniquement circonscrites à la conique S. Inversement toutes les coniques passant par trois points A, B, C et harmoniquement circonscrites à une conique S passent par un quatrième point fixe qui est le centre d'homologie du triangle ABC et de son réciproque par rapport à S.

4° Une conique Σ étant harmoniquement circonscrite à une conique S, le centre d'homologie d'un triangle quelconque inscrit dans Σ et de son réciproque par rapport à S est situé sur Σ.

5° Énoncer les théorèmes corrélatifs des précédents et examiner les cas particuliers où la conique S, est constituée par les deux points cycliques du plan et par les droites isotropes issues d'un point.

BIBLIOGRAPHIE.

La Mathématique. ***Philosophie, Enseignement***, par C.-A. Laisant, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences. Paris, Carré et Naud, 1898 (in-8° carré de 296 pages, avec 5 figures, cartonné à l'anglaise). Prix : 5 fr.

I. Nous extrayons d'une notice publiée par les éditeurs, en les modifiant çà et là, les lignes suivantes qui donneront une idée générale assez exacte du livre dont nous venons de transcrire le titre.

« Cet ouvrage, d'après ce que l'auteur annonce dès le début, n'est destiné, dans son esprit, ni aux savants, ni aux personnes dépourvues de toute instruction mathématique. Il s'adresse à ceux qui ont étudié ou qui étudient, qui enseignent ou appliquent la science mathématique; mais il n'est pas douteux, malgré les déclarations de l'auteur, que beaucoup de personnes même non initiées à la haute culture mathématique, liront avec profit une œuvre qui appprend beaucoup et qui oblige à penser.

Le point de départ de M. Laisant c'est que toutes les sciences sont expérimentales, et que la Mathématique ne fait pas exception. Ceci admis, toutes les notions générales sur les diverses branches de la Science mathématique se présentent successivement sous les yeux du lecteur avec une méthode rigoureusement logique.

Digitized by Google

L'ouvrage se divise en trois parties. Deux sont consacrées à l'exposé philosophique : *La Mathématique pure, la Mathématique appliquée.* La troisième partie concerne l'*Enseignement*.

On se convainc, en lisant la première partie, que la *Mathématique pure* n'opère que sur des abstractions fournies par le monde réel, et résultant d'une opération intellectuelle antérieure à la constitution de la science.

La *Mathématique appliquée*, ayant pour objet le retour de l'abstrait au concret, ne donne en conséquence que des solutions approchées, lesquelles n'en sont pas moins précieuses pour cela; c'est une idée qui réapparaît à chaque instant et sur laquelle il est utile d'insister, car c'est faute de la comprendre qu'on a répandu tant de sophismes et de paradoxes sur le rôle de la Science mathématique.

Dans la troisième partie relative à l'*Enseignement*, il est surtout question de l'enseignement en France. L'auteur s'y exprime avec un profond accent de sincérité, approuve ce qu'il juge bon, sans aucun parti pris, mais ne ménageant pas les critiques lorsqu'elles lui paraissent justifiées. Cette troisième partie est accessible à ceux-là mêmes qui n'auraient aucune préparation mathématique antérieure, et mérite d'être étudiée par quiconque s'intéresse à cette grande question de l'Enseignement.

Tout l'ouvrage est écrit, nous l'avons dit, avec une grande clarté et aussi avec le souci d'éviter autant que possible les louanges inutiles et tout étalage d'érudition. C'est plutôt une causerie facile qu'une étude ardue sur des notions philosophiques obscures et compliquées. Mais dans cette causerie, qui fait un appel constant au bon sens et à la raison, on trouvera matière à bien des méditations utiles. »

II. Il faudrait beaucoup de temps et beaucoup de place pour faire connaître à nos lecteurs sur quels points nous sommes d'accord ou non avec M. Laisant, car il effleure rapidement dans son livre une foule de questions parfois très ardues. Contentons-nous de quelques remarques historiques.

Pour nous, l'autorité de Kant et de Darwin (p. 27), soit en mathématiques, soit en philosophie des mathématiques, est pratiquement nulle, parce que pour parler d'une science, il faut en connaître plus que les premiers éléments. Nous en dirions volontiers autant de Comte (p. 17 et *passim*), qui fermant volontairement les yeux aux prodigieux progrès de l'analyse et de la géométrie pendant la première moitié du 19e siècle, ignore Gauss, Cauchy, Dirichlet, Abel, Jacobi, Poncelet, Möbius, Steiner, et reste toute sa vie un bon élève de l'École polytechnique, mais rien de plus.

Selon nous, Leibniz (comme Newton) avait pleine conscience de la rigueur de son nouveau calcul et de ses notations (p. 66). Archimède n'a pas fait du calcul intégral (calcul intégral = calcul inverse du calcul différentiel), mais du calcul de limite de somme d'infiniment petits, ce qui est tout différent pour les géomètres antérieurs à Newton (p. 63). Il en est de même de Fermat, et c'est pour cela que, à notre point de vue, on ne peut dire qu'il soit l'inventeur du calcul infinitésimal, si près qu'il s'en soit approché (p. 62).

Newton a trouvé, cent ans avant Lagrange et sous une forme meilleure, la

Digitized by Google

formule d'interpolation attribuée à Lagrange (p. 86). Il nous semble que le rôle de Chasles en géométrie supérieure est surfait. Cette partie de la science est surtout la création de Poncelet, précurseur de Steiner et de Möbius, devanciers eux-mêmes de Chasles (p. 97). Nous croyons que c'est Lamarle, un français qui a été pendant trente ans professeur à l'Université de Gand, qui a créé la géométrie cinématique (p. 101). — Sur les imaginaires en géométrie (p. 124), il nous semble que Von Staudt aurait dû être cité en première ligne. — Sur la culture de la science pure en Amérique (p. 143; ligne 3 de cette page, lire *Baltimore* au lieu de *Boston*), nous pensons que le mot de Hoüel est encore assez vrai : la science mathématique aux États-Unis est en grande partie une importation allemande.

III. Voici un sommaire plus détaillé des sujets abordés, dans la *Mathématique* de M. Laisant. *Introduction* (p 1-12). Aperçu général des grandes subdivisions du livre. *La mathématique pure Philosophie* 1. La mathématique et ses subdivisions (pp. 13-27). 2. Arithmétique et arithmologie (pp. 28-45). 3. Algèbre (pp. 46-68). 4. Calcul infinitésimal (pp. 62-76). 5. Théorie des fonctions (pp. 77-87). 6. Géométrie (pp. 88-105). 7. Géométrie analytique (pp. 106-122). 8. Mécanique (pp. 123-138). *La mathématique appliquée.* 1. Généralités (pp. 139-147). 2. Application du calcul (pp. 148-157). 3. Application de la géométrie (pp. 158-171). 4. Application de la mécanique (pp. 172-183). *Enseignement.* 1. Vue générale (pp. 185-199). 2-6. Enseignement de l'arithmétique (pp. 200-208), de l'algèbre et du haut calcul (pp. 209-219), de la géométrie (pp. 220-234), de la géométrie analytique (pp. 235-247), de la mécanique (pp. 248-261). 7. La hiérarchie des enseignements (pp. 261-283) Index bibliographique; table des noms et des matières (pp. 284-292).

Enfin, pour donner une idée des subdivisions d'un chapitre, voici les titres des sujets abordés dans le chapitre 6 de la première partie (Géométrie) : Origine des notions géométriques. — Les axiomes et les diverses géométries. — Divisions de la géométrie. — La géométrie des anciens. — La géométrie moderne. — Les transformations géométriques. — La géométrie cinématique. — La géométrie du triangle. — La géométrographie. — Les géométries à n dimensions. — La géométrie de situation. (P. M.)

Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes par W. W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College, Cambridge. Troisième édition, revue et augmentée par l'auteur, traduite par J. Fitz-Patrick. Paris, A. Hermann, 1898 (In-8° de IV-352 pages). Prix : 9 fr.

Traduction revue et augmentée de plusieurs récréations algébriques d'un intéressant ouvrage dont la première édition anglaise a été signalée dans *Mathesis* (1893, pp. 65-66). Rappelons les titres des douze chapitres. 1. Questions d'arithmétique. 2. Questions géométriques. 3. Questions de mécanique. 4. Questions diverses (géométrie de situation, combinaisons, jeux de cartes). 5. Les carrés magiques. 6-7. Les problèmes sur les tracés continus. 8. Duplication du cube; trisection de l'angle; quadrature du cercle. 9. Astrologie. 10. Hyperespace. 11. Du temps et de sa mesure. 12. Matière et éther.

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1105 et 1117 (*).

(Voir *Mathesis*, (2) VII, pp. 32 et 102).

On donne un demi-cercle AB. C *étant un point quelconque du diamètre* AB, *on décrit deux autres cercles* I *et* I′ *sur* AC *et* BC *comme diamètres, puis un cercle* I″ *tangent aux trois précédents. Appelons* I, I′, I″ *les centres des derniers cercles. Lorsque* C *se meut sur la droite* AB :

1° *Le point* I″ *décrit une ellipse;* 2° *le centre* I‴ *du cercle inscrit au triangle* II′I″ *décrit une parabole;* 3° *les côtés* II″, I′I″ *enveloppent un cercle;* 4° *les droites* II‴, I′I‴ *enveloppent une parabole;* 5° *le cercle* I‴ *enveloppe un cercle;* 6° *le cercle des neuf points du triangle* II′I″ *enveloppe un cercle.*

Solution par M. E. N. Barisien. Soient : R le rayon du cercle AB, ρ et ρ' les rayons des cercles AC et BC, ρ'' le rayon du cercle tangent aux trois précédents; O le milieu de AB, r la longueur OI″, θ l'angle I″OB, k la longueur OC.

Prenons des axes rectangulaires en O, OB étant l'axe des x positifs.

1° Déterminons tout d'abord le rayon ρ'' en fonction de ρ, ρ' et R.

Les triangles IOI″ et I′OI″ donnent les relations

$$\overline{II''}^2 = \overline{IO}^2 + \overline{I''O}^2 + 2.IO.I''O\cos\theta,$$
$$\overline{I'I''}^2 = \overline{I'O}^2 + \overline{I''O}^2 - 2.I'O.I''O\cos\theta,$$

ou

$$(1) \qquad (\rho + \rho'')^2 = \rho'^2 + (R - \rho'')^2 + 2\rho'(R - \rho'')\cos\theta,$$
$$(2) \qquad (\rho' + \rho'')^2 = \rho^2 + (R - \rho'')^2 - 2\rho(R - \rho'')\cos\theta.$$

Éliminant θ entre ces deux équations et tenant compte de la relation $\rho + \rho' = R$, on trouve

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'};$$

donc

$$(4) \qquad \rho'' = \frac{\rho\rho' R}{R^2 - \rho\rho'}.$$

(*) Nous réunissons ici les questions 1105 (Barisien) et 1117 (Déprez); la première comprend le n° 1 de l'énoncé actuel, et la seconde les n^os^ suivants.

(*Rédaction*).

Digitized by Google

Ajoutant (1) et (2), on trouve aussi

$$\cos\theta = \frac{R(R-3\rho'')}{(\rho-\rho')(R-\rho'')}. \tag{5}$$

Exprimons maintenant ρ, ρ', ρ'', r et θ en fonction de k. On a d'abord

$$\rho = \frac{R+k}{2}, \quad \rho' = \frac{R-k}{2}; \tag{6}$$

par suite, l'égalité (4) se transforme en

$$\rho'' = \frac{R(R^2-k^2)}{3R^2+k^2}. \tag{7}$$

Donc $r = R - \rho''$, c'est-à-dire

$$r = \frac{2R(R^2+k^2)}{3R^2+k^2}. \tag{8}$$

Portant les valeurs (6) et (7) dans (5), on trouve

$$\cos\theta = \frac{2Rk}{R^2+k^2}; \tag{9}$$

$$\sin\theta = \frac{R^2-k^2}{R^2+k^2}. \tag{10}$$

Éliminant k^2 entre (8) et (10), on trouve

$$r = \frac{2R}{2+\sin\theta}, \tag{11}$$

ce qui indique que *le lieu du centre* I'' *est une ellipse ayant un foyer en* O *et passant par* A *et* B. En passant aux coordonnées cartésiennes ou en cherchant la distance focale, on trouve que le second foyer est sur une perpendiculaire élevée en O sur AB du côté opposé au demi-cercle AB et égale à $\frac{2}{3}$ R.

2° *Lieu du centre* I'''. Soient a, b, c les côtés du triangle II'I'', tels que

$$a = \rho' + \rho'', \quad b = \rho + \rho'', \quad c = \rho + \rho'.$$

Alors

$$p = \rho + \rho' + \rho'', \quad p - a = \rho, \quad p - b = \rho', \quad p - c = \rho''.$$

Le cercle inscrit dans le triangle II'I'' est tangent en C au côté II'. L'abscisse de ce centre est donc $x = OC$ ou $x = k$. Quant à l'ordonnée y de I''', elle est égale au rayon du cercle inscrit. Sa valeur est donc

$$y = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{\rho\rho'\rho''}{R+\rho''}}$$

Digitized by Google

ou, en introduisant les valeurs (6) et (7),

$$y = \frac{R^2 - k^2}{4R}.$$

Remplaçant k par x, on trouve pour le lieu de I''' la parabole

$$x^2 + 4Ry - R^2 = 0. \tag{12}$$

qui passe par A et B.

3° *Enveloppe des côtés* II'', I'I''. Étudions le cercle exinscrit au triangle II'I'' situé dans l'angle I''.

De ce que IO = CI', on conclut que le centre de ce cercle est sur la perpendiculaire élevée en O à AB. Son rayon r_0 est donné par la formule

$$r_0 = \frac{S}{p - c} = \frac{S}{\rho''}. \tag{13}$$

Or, on a

$$S = \sqrt{p(p-c)(p-c)(p-c)} = \sqrt{\rho\rho'\rho''(R + \rho'')} = \frac{R(R^2 - k^2)}{3R^2 + k^2}$$

ou $S = R\rho''$. En rapprochant cette égalité de la relation (15), on voit que $r_0 = R$.

Par conséquent, le cercle exinscrit dans l'angle I'' est un cercle fixe ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + 2Ry = 0. \tag{14}$$

Il en résulte immédiatement que ce cercle est l'enveloppe des droites II'' et I'I''.

3° *Enveloppe des droites* II''', I'I'''. Cherchons l'équation de la droite I'I'''. Les coordonnées de I' en fonction de k sont

$$x = \frac{R + k}{2}, \quad y = 0;$$

celles de I''' sont

$$x = k, \quad y = \frac{R^2 - k^2}{4R}.$$

L'équation de I'I''' est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ R + k & 0 & 2 \\ k & \frac{R^2 - k^2}{4R} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

ou en développant, et faisant disparaître le facteur $(R - k)$

$$(R + k)^2 - 2x(R + k) - 4Ry = 0.$$

$(R + k)$ est un paramètre qui entre au second degré. L'enveloppe de cette droite est donc la parabole

$$x^2 + 4Ry = 0. \tag{15}$$

5° *Enveloppe du cercle* I'''. L'équation de ce cercle est

$$(x - k)^2 + \left[y - \frac{(R^2 + k^2)}{4R}\right]^2 = \frac{(R^2 - k^2)^2}{16R^2};$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à k,

$$k^2(y + 2R) - 4kRx + 2R(x^2 + y^2) - R^2y = 0.$$

En exprimant que l'équation en k a ses deux racines égales, on a

$$4Rx^2 - (y + 2R)[2(x^2 + y^2) - Ry] = 0,$$

ou

$$y[2(x^2 + y^2) + 3Ry - 2R^2] = 0.$$

L'enveloppe se compose donc de la droite II' et du cercle

$$x^2 + \left(y + \frac{3R}{4}\right)^2 = \left(\frac{5R}{4}\right)^2.$$

6° *Enveloppe du cercle des neuf points du triangle* II'I''. Elle me paraît difficile à obtenir par le calcul(*).

Remarques. Voici d'autres propriétés et lieux géométriques concernant cette intéressante question de M. Déprez.

1. Dans le triangle II'I'', la hauteur I''H est égale à deux fois le rayon ρ''.

2. Le lieu du point de rencontre du cercle I'' avec la hauteur I''H est une ellipse.

3. On a la relation

$$II' + I''H = II'' + I'I''.$$

4. Le lieu du centre des cercles exinscrits au triangle II'I'' dans chacun des angles I et I', se compose pour chacun d'une cubique.

Soient K le point de contact des cercles I et I'' ; K' le point de contact

(*) Voir, à ce sujet, la solution de M. Droz-Farny, donnée ci-après. L'enveloppe 6° n'est autre que le cercle trouvé au n° 3. (*Rédaction.*)

Digitized by Google

des cercles I' et I''; K'' le point de contact du cercle AB et du cercle I''.

5. La droite I''C passe par un point fixe.

6. La droite K''C passe par un point fixe.

7. La droite K''I''' passe par un point fixe.

8. Le lieu du point d'intersection de I''H et K''C est une ellipse.

9. Le lieu du point d'intersection des droites I''C et K''I''' est une ellipse.

10. Le lieu du centre de gravité du triangle II'I'' est une cubique.

11. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle II'I'' est une quartique.

12. Le lieu des milieux des droites II''' et I'I''' se compose de deux paraboles.

13. La droite I''I''' passe par un point fixe.

14. Le lieu de chacun des points K et K' est une quartique.

15. Le lieu du centre de similitude externe des cercles I' et I'' est la tangente en A au cercle AB.

16. Le lieu du centre de similitude externe des cercles I et I'' est la tangente en B au cercle AB.

17. Le lieu des centres de similitude des cercles AB et I'' se compose du cercle AB et d'une parabole.

18. Le lieu des centres de similitude des cercles AB et I''' se compose de deux coniques.

19. Le lieu des centres de similitude des cercles I et I''' se compose d'une ligne droite et d'une quartique.

20. Le lieu des centres de similitude des cercles I' et I''' se compose d'une ligne droite et d'une quartique.

21. Le centre de similitude externe des cercles I'' et I''' est un point fixe.

22. Le lieu du centre de similitude interne des cercles I'' et I''' est une ellipse.

23. La droite KK' et la tangente en K'' au cercle AB se rencontrent sur le diamètre AB.

24. La droite KK' enveloppe une ellipse.

25. Chacune des droites CK et CK' passe par un point fixe.

26. Les polaires du point I''' par rapport à chacun des cercles I, I' et I'' enveloppent, chacune, une conique.

Digitized by Google

27. Les polaires du point I'' par rapport aux deux cercles I et I' enveloppent, chacune, une ellipse.

28. Soient P le milieu de II', Q le milieu de I'I'' et T le milieu de PH. La projection de la droite TQ sur AB est constante et égale à $\frac{1}{4}$ R.

29. Les droites K''A et K''B enveloppent une ellipse.

(E. N. Barisien.)

MM. Colart (Huy), Déprez, Droz-Farny, Delahaye (Roye), ont résolu la question 1105, en cherchant d'abord le rayon du cercle I''; ce rayon résulte du théorème de Stewart appliqué aux droites I''I, I''O, I''I'.

M. Colart a résolu la question 1117, à l'exception de la dernière partie.

M Droz a donné une solution simple et complète de la question 1117. Le lecteur remarquera l'élégance avec laquelle il démontre les propositions de M. Déprez. Les notations sont celles de M. Barisien.

Solution par M. Droz-Farny. Soient L, M, N les points de contact du cercle I'' avec les cercles O, I, I'. D'après un théorème connu, les tangentes en A, M, L se coupent en un point α; les tangentes en B, M, N concourent en un point β; enfin, les tangentes en C, M. N passent par le point I'''. Cela posé, les trapèzes $A\alpha I'''C$, $B\beta I'''C$, $A\alpha\beta B$ donnent

$$\alpha M \cdot I'''M = \rho^2, \quad \beta N \cdot I'''N = \rho'^2,$$
$$\alpha L \cdot \beta L = \alpha M \cdot \beta N = R^2.$$

Multipliant l'une par l'autre les deux premières relations et tenant compte de la troisième, on trouve

$$I'''C = \frac{\rho\rho'}{R}.$$

Si x, y sont les coordonnées de I''', on a

$$x = OC = \rho - \rho', \quad y = \frac{\rho\rho'}{R}, \quad \rho + \rho' = R;$$

d'où, en éliminant ρ et ρ' :

$$x^2 = R^2 - 4Ry.$$

Le lieu de I''' est donc une parabole.

L'enveloppe du cercle I''' résulte du théorème suivant qu'on démontre facilement :

Le lieu des centres des cercles inscrits dans un segment de cercle est

Digitized by Google

une parabole de même axe de symétrie que le segment et ayant pour foyer le centre du cercle; la directrice est une parallèle à la base du segment, menée à une distance égale au rayon du cercle.

Soit E l'extrémité du rayon du cercle O perpendiculaire à AB du côté opposé au demi-cercle AB. La relation $I'''C = \frac{\rho\rho'}{R}$ se traduit par la proportion

$$\frac{I'''C}{IO} = \frac{OC}{OE};$$

donc les triangles CI'''I, OEI sont semblables et les côtés homologues sont perpendiculaires. Par conséquent, la droite II''' enveloppe une parabole ayant pour foyer E, pour tangente au sommet, AB. La droite I'I''' a la même enveloppe.

Il résulte de ce qui précède, que EI et EI' sont deux bissectrices extérieures du triangle II''I'; donc E est le centre d'un cercle exinscrit à ce triangle. Ce cercle a pour rayon EO = R: donc il est fixe. On en conclut que ce cercle est l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle II'I''; il est aussi l'enveloppe des droites variables II'', I'I''.

Remarquons aussi que la droite I''I''' passe par un point fixe E; que la perpendiculaire en C sur AB rencontre OL en un point qui décrit une parabole de foyer O; enfin que le diamètre du cercle I'' est égal à la distance de son centre à la droite AB.

×Question 1130(*).

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 175).

Un angle de grandeur invariable pivote autour de son sommet A *qui est fixe. D'un point fixe* B, *situé dans le même plan, on abaisse sur les côtés de cet angle des perpendiculaires dont les pieds sont* C *et* D. *Ces perpendiculaires rencontrent les côtés de l'angle en deux autres points* E *et* F : 1° *Quel est le lieu géométrique des points* C *et* E? 2° *Démontrer que la longueur de la droite* CD *est invariable et en déduire le lieu géométrique*

(*) Le 6e § de la question, relatif à l'enveloppe de la droite EF, est inexact. La droite EF se meut parallèlement à elle-même. Si l'on projette le point fixe B sur les côtés de l'angle mobile A, les projetantes faisant des angles constants avec ces côtés, les droites EF et CD enveloppent des ellipses.

Digitized by Google

de son milieu I. 3° *Quels sont les lieux géométriques des points* E *et* F? 4° *Trouver les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles* AEF, BEF. 5° *Trouver le lieu du milieu de la droite* EF.

Solution par M. E. COLART. 1° Les points C et D décrivent la circonférence de diamètre AB. 2° La corde CD est constante comme sous-tendant un angle constant CAD dans la circonférence de diamètre AB; par suite, le milieu I de CD décrit une circonférence ayant son centre au milieu de AB.

3° Les points E et F décrivent les segments capables de 1 droit — A décrits sur AB.

4° B étant l'orthocentre du triangle AEF, on a $EF = AB \operatorname{tg} A$. Par suite, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit à AEF,

$$R = \frac{EF}{2 \sin A} = \frac{AB}{2 \cos A}.$$

Le centre du cercle circonscrit à AEF décrit donc une circonférence de centre A. De même, le centre du cercle circonscrit à EBF décrit une circonférence de centre B.

5° Soit M le milieu de EF et O le milieu de AB. OM étant le diamètre du cercle des neuf points du triangle AEF, est égal à R ou $\frac{AB}{2 \cos A}$. Le point M décrit donc une circonférence de centre O.

Ont résolu la même question MM. BARISIEN, DEGUELDRE, DÉPREZ et V. MAES.

M. DÉPREZ signale d'autres propriétés de la figure :

1. Les droites qui joignent D et C au point de rencontre des droites AB et EF ont des directions fixes.

2. Le centre de gravité du triangle AEF et le centre du cercle des neuf points du même triangle décrivent des circonférences.

3. L'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points du triangle ADC décrivent des circonférences. Il en est de même des projections de C sur AD et de D sur AC.

4. Soit S le point de rencontre des droites AB et CD; les droites ES, FS enveloppent des coniques.

5. Le centre du cercle inscrit au triangle ACD et celui du cercle exinscrit situé dans l'angle CAD se meuvent sur un limaçon de Pascal.

La propriété 3° a été également remarquée par MM. COLART et BARISIEN. Les droites CD et EF se coupent sur une quartique (BARISIEN).

Digitized by Google

×Question 1141.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 238).

Dans un triangle ABC, *l'angle* A *est constant et les pieds* B',C' *des hauteurs* BB', CC' *sont fixes. Démontrer que* 1° *le côté* BC *est constant et pivote autour d'un point fixe*; 2° *le cercle des neuf points du triangle* ABC *est fixe*; 3° *le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité décrivent des circonférences.* (V. Cristesco.)

Solution par MM. Colart, Libert (Ixelles), Maes (Gand), Soons, Jerabek, Degueldre et Barisien. La relation connue, $B'C' = BC.\cos A$, prouve que BC est constant.

D'ailleurs, si H est l'orthocentre de ABC, le milieu I de AH est le centre du cercle circonscrit à B'AC' et est fixe. Par suite, le cercle des neuf points (passant par B',C',A') est fixe, et le milieu M de BC, qui est diamétralement opposé à I dans ce cercle, est aussi fixe.

Il s'ensuit aussi que le centre O du cercle circonscrit à ABC décrit une circonférence symétrique de la circonférence B'AC' par rapport au centre ω du cercle des neuf points de ABC.

Enfin, le centre de gravité G du triangle ABC, se trouvant aux $\frac{2}{3}$ de la sécante MA qui passe constamment par le point fixe M, décrit aussi une circonférence.

Remarques. I. Les sommets B et C décrivent une même circonférence de centre M et de rayon MB'.

II. Les propriétés qui précèdent permettent de construire un triangle dont on donne l'angle A, la hauteur AA' et les pieds B, B' des deux autres hauteurs.

Question 1153.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 31).

Démontrer que pour $x = a$, *on a*

$$\lim \frac{\operatorname{tang}(\sin x) - \sin(\operatorname{tang} x) - \frac{1}{30} x^7}{x^9} = \frac{29}{756}.$$

(Cayley.)

Digitized by Google

Solution par M. J. Jonesco (Bucarest). Développons l'expression donnée en série d'après les puissances entières de x, et retenons de ce développement les termes de degré moindre que 9, car les autres s'évanouissent pour $x = 0$. On connait les développements en séries

$$\sin x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + \cdots$$
$$\operatorname{tang} x = x + \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7 + \delta x^9 + \cdots$$

où les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ont les valeurs suivantes :

$$a = -\frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{120}, \quad c = -\frac{1}{5040}, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{15}, \quad \gamma = \frac{17}{315}.$$

Dans le développement de tang x, remplaçons x par sin x et puis sin x par son développement. On obtiendra ainsi le développement de tang (sin x) :

$$\operatorname{tang}(\sin x) = x + (a+\alpha)x^3 + (b + 3\alpha a + \beta)x^5 + (c + 3ab + 3\alpha a^2 + 5\beta a + \gamma)x^7 + (d + \alpha a^3 + 3\alpha c + 6\alpha a b + 5\beta b + 10\beta a^2 + 7\gamma a + \delta)x^9 + \cdots$$

En remplaçant a, b, c, d respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et réciproquement, on obtiendra le développement de sin (tang x), et la différence de ces deux développements sera :

$$\operatorname{tang}(\sin x) - \sin(\operatorname{tang} x) = [2(\beta a - \alpha b) + 3\alpha a(a - \alpha)]x^7 + [a\alpha(a^2 - \alpha^2) + 4(a\gamma - \alpha c) + 6a\alpha(b - \beta) + 10(\beta a^2 - \alpha^2 b)]x^9 + \cdots$$

Calculons les valeurs numériques des coefficients de x^7 et x^9 :

$$2(\beta a - \alpha b) = -\frac{2.1.2}{6.15} - \frac{2.1.1}{3.120} = -\frac{1}{20},$$

$$3\alpha a(a - \alpha) = +\frac{3.1.1.1}{6.3.6} + \frac{3.1.1.1}{6.3.3} = \frac{1}{12}.$$

$$a\alpha(a^2 - \alpha^2) = -\frac{1.1}{3.6}\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1}{216},$$

$$4(a\gamma - \alpha c) = -\frac{4.1.17}{6\,315} + \frac{4.1}{3.5040} = -\frac{1}{28}.$$

$$6a\alpha(b - \beta) = -\frac{6.1\,1\,1}{6.3.120} + \frac{6.1.1.2}{6.3.15} = \frac{1}{24},$$

$$10(\beta a^2 - \alpha^2 b) = 10\left(\frac{2.1}{15.36} - \frac{1\,1}{9.120}\right) = \frac{1}{36}.$$

Digitized by Google

Donc les coefficients de x^7 et x^9 sont :

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{216}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}-\frac{1}{28}=\frac{29}{756}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}(\sin x)-\sin(\operatorname{tang})=\frac{1}{30}x^7+\frac{29}{756}x^9+\cdots\cdots;$$

d'où l'on déduit

$$\lim\frac{\operatorname{tang}(\sin x)-\sin(\operatorname{tang} x)-\frac{1}{30}x^7}{x^9}=\frac{29}{756}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

832. Les tangentes menées du point M du plan d'une ellipse, à cette ellipse, rencontrent le grand axe en A et B, et le petit axe en C et D. Soit N le point de rencontre des normales élevées aux points de contact des tangentes avec l'ellipse.

On a la relation

$$\frac{AB}{CD}=\pm\operatorname{tg}NOA.$$

(E. N. Barisien).

833. La distance du sommet d'une parabole à la tangente en un point M de la parabole, est le $\frac{1}{3}$ de la distance du sommet à la sécante commune de la parabole avec son cercle osculateur en M.

(E. N. Barisien).

834. Par le sommet O d'une parabole on mène deux cordes rectangulaires variables OA et OB. Le centre des symédianes du triangle AOB décrit une circonférence. (E. N. Barisien).

On voit aisément que la droite AB passe par le point fixe C situé sur l'axe de la parabole, et tel que $OC=2p$, $2p$ étant le paramètre de la parabole. D'autre part, le centre des symédianes du triangle AOB est le milieu de la hauteur issue de O. Donc, le lieu de ce centre est le cercle de diamètre p et tangent à la parabole en O.

(E. N. B.)

835. La corde commune à une parabole et à son cercle osculateur en chacun des points de la parabole enveloppe une parabole.

(E. N. Barisien).

Digitized by Google

Cette corde, au point M (x_1, y_1) de la courbe, a pour équation

$$(y - y_1)y_1 + p(x - x_1) = 0, \qquad (1)$$

or, à cause de $y_1^2 = 2px_1$,

$$3y_1^2 - 2yy_1 - 2px = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est la parabole

$$y^2 + 6px = 0.$$

REMARQUE. Soient δ_1 et δ_2 les distances du sommet O de la parabole à la tangente en M et à la droite (1); on a

$$\delta_1 = \frac{px_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad \delta_2 = \frac{3px_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}},$$

donc $\delta_2 = 3\delta_1$, (E. BARISIEN).

838. On considère le triangle MFF′ ayant pour sommets les deux foyers F, F′ d'une ellipse donnée et le point M variable de cette ellipse. Il existe, outre le centre O des médianes du triangle MFF′, trois autres points O_1, O_2, O_3 tels que le produit de la distance de l'un de ces points à un côté par la longueur de ce côté soit le même pour les trois côtés. — Le lieu de chacun des points O_1, O_2, O_3 est une ellipse. (E. N. BARISIEN).

Si par chacun des sommets du triangle MFF′ on mène des droites parallèles aux côtés opposés, ces droites forment un triangle dont les sommets sont les points O_1, O_2, O_3.

On voit alors sans difficulté, soit géométriquement, soit par le calcul, que les points O_1, O_2, O_3 décrivent des ellipses, dont l'une est l'ellipse donnée.

837. Construire la courbe

$$\rho = \frac{a \sin 2\omega}{\sin 3\omega}.$$

(E. N. BARISIEN).

Cette équation donne, successivement,

$$\rho(3\sin\omega - 4\sin^3\omega) = 2a\sin\omega\cos\omega, \quad \rho(3 - 4\sin^2\omega) = 2a\cos\omega,$$
$$3x^2 - y^2 = 2ax.$$

Elle représente une hyperbole facile à construire.

838. Résoudre les équations

$$\frac{\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2} = m,$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x,$$

$$\frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos(a + x)\cos(a - x)} = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}.$$

Digitized by Google

La première se ramène à

$$\sin 2x = 2m\cos^2 2x;$$

la seconde à

$$\sin x + \sin x \cos x \cos 2x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = n\pi;$$

la troisième à

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 2a}{\cos 60^\circ + \cos 2a},$$

ou

$$\frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 2a}{\cos 60^\circ + \cos 2a},$$

d'où

$$2x = 2n\pi \pm 60^\circ$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1161 (*). Si l'on donne le foyer d'une parabole et une normale, le sommet décrit une cissoïde de Dioclès; si l'on donne le sommet et une normale, le foyer décrit une cissoïdale d'ellipse. (J. Neuberg).

×**1165**. Soient AB un diamètre fixe d'un cercle de centre O, et M un point variable de la circonférence. Démontrer que le lieu des centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles OAM et OBM se compose de deux droites. — Généraliser en remplaçant AB par une corde fixe du cercle donné. (E. N. Barbien).

1166. a, b, c, x, y désignant des quantités complexes, si l'on suppose

$$y = ax^2 + bx + c,$$

comment construit-on le point y qui correspond à un point donné x ?

1167. Dans tout hexagone gauche rectangle (dont les six angles sont droits), les plus courtes distances des trois couples de côtés opposés ont une normale commune. (J. Petersen.)

1168. On mène en un point M d'une parabole la tangente MT et la normale MQP qui rencontre l'axe en Q et la courbe en P. On projette P en R sur la directrice, et on mène en P la normale qui coupe en N l'axe. Démontrer 1° que MQ est égale à la distance de R à la parallèle menée par le foyer F à MT; 2° que QP est égale à la distance de N à MT. (A. C.).

(*) La question 1161, page 78 étant identique à la question 1090, proposée dans *Mathesis*, 1896, (2), VI, p. 240, nous la remplaçons ici par une autre.

Digitized by Google

NORMALES AUX SURFACES ET AUX COURBES ALGÉBRIQUES,

par M. STUYVAERT.

1. Soient x', y', z', t' les coordonnées courantes homogènes (les axes sont rectangulaires et $t' = 1$); soit (x, y, z, t) un point d'une surface algébrique f; la normale en ce point est représentée par les équations

$$\frac{xt' - x't}{\frac{df}{dx}} = \frac{yt' - y't}{\frac{df}{dy}} = \frac{zt' - z't}{\frac{df}{dz}} \qquad (1)$$

Si l'on y regarde à présent x', y', z', t' comme les coordonnées d'un point fixe P et x, y, z, t comme les coordonnées courantes, ces équations représentent, comme on sait, une courbe (N) qui passe par les pieds des normales issues de P; dans le cas des quadriques, cette courbe est une cubique gauche. Mais les relations (1) expriment la condition pour que le plan polaire d'un point N (x, y, z, t) soit perpendiculaire à la droite NP. Ainsi, *la courbe* (N) *est le lieu des points tels que leur plan polaire est normal au rayon vecteur issu de* P.

Les égalités (1) sont vérifiées, d'abord par les coordonnées de P, ensuite par les valeurs de x, y, z, t qui annulent à la fois $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ et par suite des fonctions linéaires de ces dérivées; or ces valeurs des variables sont les coordonnées des points communs aux premières surfaces polaires des points de l'infini. Dans le cas des quadriques, ces points se réduisent au centre de la surface.

La courbe (N) rencontre le plan de l'infini, représenté par $t = 0$, en des points dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{x}{\frac{df}{dx}} = \frac{y}{\frac{df}{dy}} = \frac{z}{\frac{df}{dz}}, \qquad (2)$$

et ces dernières sont indépendantes de P.

Donc, toutes les courbes (N) ont les mêmes directions asymptotiques; géométriquement cela est évident, car les asymptotes d'une de ces courbes déterminent, par leur direction, les points de l'infini dont le plan polaire est perpendiculaire à cette direction, laquelle doit ainsi être indépendante du point initial P.

Digitized by Google

Dans le cas des quadriques, ces asymptotes sont parallèles aux axe de symétrie de la surface.

La courbe (N) ne peut rencontrer la surface f dans le plan de l'infini qu'en des points du cône isotrope, car les coordonnées des points de rencontre à l'infini doivent vérifier, outre les équations (2), les relations suivantes

$$t = 0, \quad f(x, y, z, t) = 0,$$

et, par suite, en appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = 0;$$

cette égalité, combinée avec les relations (2) conduit à l'équation du cône isotrope,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

la propriété précédente se démontre aisément par la Géométrie.

2. Dans le cas d'une courbe plane f, en coordonnées rectangulaires rendues homogènes, on a l'équation

$$\frac{xz' - x'z}{\frac{df}{dx}} = \frac{yz' - y'z}{\frac{df}{dy}},$$

qui représente le lieu d'un point N tel que la droite PN est perpendiculaire à la droite polaire de N.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propriétés analogues à celles du n° précédent.

3. Soit

$$\varphi(U, V, W) = 0$$

l'équation d'une courbe plane en coordonnées-lignes (*) homogènes (les axes sont rectangulaires et $W = 1$).

Si u, v, w sont les coordonnées d'une droite, son point-pôle N a pour équation

$$U\frac{d\varphi}{du} + V\frac{d\varphi}{dv} + W\frac{d\varphi}{dw} = 0,$$

et les coordonnées-points de ce pôle sont proportionnelles à

$$\frac{d\varphi}{du}, \quad \frac{d\varphi}{dv}, \quad \frac{d\varphi}{dw};$$

(*) Ou coordonnées *tangentielles*.

Digitized by Google

les coordonnées-points de P étant toujours x', y', z', la droite NP a pour coordonnées-lignes des quantités proportionnelles aux déterminants

$$u_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\varphi}{dw} \end{vmatrix}, \quad v_1 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ \frac{d\varphi}{dw} & \frac{d\varphi}{du} \end{vmatrix}, \quad w_1 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \end{vmatrix}.$$

La condition pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite (u, v, w) est

$$uu_1 + vv_1 = 0;$$

d'où, par substitution des valeurs de u_1, v_1, on a l'équation de l'enveloppe des droites perpendiculaires au rayon vecteur mené de P à leur point-pôle :

$$\psi = \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\varphi}{dw} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Les tangentes communes aux courbes φ et ψ touchent donc la première aux pieds des normales issues de P.

La ligne ψ touche la droite $u = 0$, $v = 0$, qui est la droite de l'infini; dans le cas des coniques, ψ est donc une parabole bien connue. — La courbe ψ est tangente encore aux droites dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{d\varphi}{du} : x' = \frac{d\varphi}{dv} : y' = \frac{d\varphi}{dw} : z';$$

ce sont les droites ayant P pour point-pôle; dans le cas des coniques, elles se réduisent à la polaire de P.

4. La courbe (N) du n° 2 est de l'ordre n, égal à celui de la courbe f; leurs intersections sont en nombre n^2; cependant pour savoir combien de normales on peut mener du point P, il faut faire subir à ce nombre n^2 des réductions provenant des singularités de la courbe f. Tout point double ou tout point de rebroussement de f est situé sur la courbe (N), car ses coordonnées annulent $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$; chacun des points doubles, en nombre d, qu'ils soient distincts ou réunis en points multiples d'ordre supérieur, compte pour deux intersections; chacun des points de

Digitized by Google

rebroussement, en nombre k, compte pour trois intersections, car la tangente en un de ces points est tangente à toutes les 1ères polaires, donc à (N).

Par suite, le nombre des normales est

$$n^2 - 2d - 3k$$

La théorie corrélative, faite d'après le n° 3, donne, pour le nombre des normales issues de P,

$$m^2 - 2t - 3\omega,$$

m représentant la classe de la courbe, t le nombre de tangentes doubles, ω le nombre des points d'inflexion. Les deux expressions trouvées ci-dessus doivent être équivalentes; effectivement les formules connues de Plucker,

$$m = n(n-1) - 2d - 3k$$
$$n = m(m-1) - 2t - 3\omega,$$

montrent que les expressions précédentes valent toutes deux $m + n$. *Le nombre des normales qu'on peut mener d'un point à une courbe algébrique est la somme de l'ordre et de la classe de cette courbe.* (Voir Salmon, *Higher plane Curves*, p. 110)(*).

Gand, 5 août 1897.

SUR DES TRIPLES DE CERCLES ASSOCIÉS,

par M. J. J. Duren Loriga.

1. Soient x, y, z les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle de référence ABC. Si λ, μ, ν désignent les puissances des points A, B, C par rapport à un cercle Σ, l'équation de Σ est

$$(x + y + z)(\lambda x + \mu y + \nu z) - \mathrm{S}a^2yz = 0. \qquad (1)$$

Considérons les cercles Σ' et Σ'' dont les puissances par rapport aux

---

(*) Dans les courbes planes, on peut généraliser la notion de normale : on considère la droite qui fait avec la tangente un angle constant; la courbe analogue à la courbe (N) du n° 2 ci-dessus a été étudiée par M. Dewulf (NAM., 1859, 1872 et *Bull. des sc. math.* 1878). Salmon (*Higher plane Curves*) définit encore la *quasi normale*, ligne dont les propriétés sont projectives, et dont la normale est un cas particulier.

Digitized by Google

sommets A, B, C sont respectivement μ, ν, λ et ν, λ, μ; ils ont pour équations

$$(x+y+z)(\mu x+\nu y+\lambda z)-Sa^2yz=0, \quad (2)$$
$$(x+y+z)(\nu x+\lambda y+\mu z)-Sa^2yz=0. \quad (3)$$

Nour dirons que Σ' est le *premier associé*, et Σ'', le *second associé* de Σ.

Les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle ABC, combiné successivement avec Σ, Σ', Σ'', sont les droites conjuguées isobariques :

$$\lambda x+\mu y+\nu z=0, \quad \mu x+\nu y+\lambda z=0, \quad \nu x+\lambda y+\mu z=0.$$

Les axes radicaux des cercles Σ, Σ', Σ'' combinés deux à deux sont les trois droites isobariques :

$$(\mu-\nu)x+(\nu-\lambda)y+(\lambda-\mu)z=0,$$
$$(\nu-\lambda)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\nu)z=0,$$
$$(\lambda-\mu)x+(\mu-\nu)z+(\nu-\lambda)z=0.$$

On en conclut que le centre radical des cercles Σ, Σ', Σ'' est le centre de gravité G de ABC. Si l'un de ces cercles passe par G, les deux autres passent également par ce point.

Le rayon du cercle orthotomique de trois cercles associés a pour expression

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3(\lambda+\mu+\nu)-(a^2+b^2+c^2)}.$$

8. Examinons quelques cas particuliers. Le cercle circonscrit à ABC coïncide avec ses associés.

Le cercle de Brocard et ses associés ont pour équations :

$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sb^2c^2x-Sa^2yz=0,$$
$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sa^2c^2x-Sa^2yz=0,$$
$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sa^2b^2x-Sa^2yz=0.$$

Les axes radicaux de ces cercles, pris deux à deux, sont les droites joignant le centre de gravité G respectivement au réciproque du point de Lemoine, au point direct et au point rétrograde de Brocard. Le rayon du cercle orthotomique est égal à

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Sa^2b^2-Sa^4}{Sa^2}}.$$

Digitized by Google

Le premier cercle de M'Cay et ses associés ont pour équations

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)x+a^2(y+z)]-Sa^2yz=0,$$

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)z+a^2(x+y)]-Sa^2yz=0,$$

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)y+a^2(x+z)]-Sa^2yz=0.$$

Les axes radicaux des couples (Σ, Σ'), (Σ', Σ''), (Σ'', Σ) sont respectivement les médianes BG, AG, CG.

Les deux associés du cercle conjugué à ABC ont pour axe radical la polaire trilinéaire du point de Steiner; le cercle orthotomique de ces trois cercles a pour rayon

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)},$$

pour axe radical avec le cercle circonscrit ABC la polaire trilinéaire de l'orthocentre.

Les associés du cercle des neuf points de ABC ont pour axe radical la droite KG; le rayon du cercle orthotomique est égal à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}.$$

On peut de même étudier les associés des cercles de Neuberg, de ceux de Longchamps, de ceux de Tucker, etc.

3. On peut considérer les cercles associés d'un point remarquable M regardé comme cercle de rayon nul. Si l'on désigne par l, m, n les distances MA, MB, MC, les équations du point M et des cercles associés sont

$$(x+y+z)(l^2x+m^2y+n^2z)-S\,a^2yz=0,$$
$$(x+y+z)(m^2x+n^2y+l^2z)-S\,a^2yz=0,$$
$$(x+y+z)(n^2x+l^2y+m^2z)-S\,a^2yz=0;$$

en représentant par α, β, γ les coordonnées barycentriques de M, on a

$$l^2=\frac{(\beta+\gamma)(c^2\beta+b^2\gamma)-a^2\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}, \text{ etc.}$$

4. Passons à quelques cas particuliers. L'équation de G considéré comme point-cercle est

$$\frac{x+y+z}{9}S(2b^2+2c^2-a^2)x-S\,a^2yz=0;$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite GK.

Digitized by Google

L'équation du point de Lemoine est

$$\frac{x+y+z}{(a^2+b^2+c^2)^2}\,\mathrm{S}\,b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)\,x-\mathrm{S}\,a^2yz=0\,;$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite joignant G au réciproque de K, et les axes radicaux de ces cercles combinés avec le point K passent l'un par le point direct de Brocard, l'autre par le point rétrogade de Brocard.

Le point direct de Brocard, a pour équation

$$\frac{x+y+z}{a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2}(b^4c^2x+c^4a^2y+a^4b^2z)-\mathrm{S}\,a^2yz+0.$$

Le centre du cercle inscrit à ABC a pour équation

$$\frac{x+y+z}{p}[bc(p-a)x+ca(p-b)y+ab(p-c)z]-\mathrm{S}\,a^2yz=0.$$

L'axe radical de ses associés passe par le réciproque de I; celui de I combiné avec les cercles associés passe respectivement par le point direct et le point inverse de Jeřábek.

5. Si, dans l'équation du cercle Σ, on intervertit deux des paramètres λ, μ, ν, on obtient trois nouveaux cercles Σ_1, Σ_2, Σ_3 représentés par

$$\begin{aligned}(x+y+z)(\lambda x+\nu y+\mu z)-\Sigma a^2yz&=0,\\(x+y+z)(\nu x+\mu y+\lambda z)-\Sigma a^2yz&=0,\\(x+y+z)(\mu x+\lambda y+\nu z)-\Sigma a^2yz&=0;\end{aligned}$$

nous les appelons les *semi-associés* de Σ. Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

Les trois cercles semi-associés ont pour centre radical le centre de gravité G; les axes radicaux d'un cercle Σ par rapport à ses semi-associés sont les médianes ABC; un cercle quelconque, ses associés et ses semi-associés ont même cercle orthotomique.

Digitized by Google

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×8. *Note sur les bissectrices d'un triangle.* I. Soit AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC. La circonférence décrite du centre C avec le rayon CD coupe AD en un second point E; le point A est extérieur au cercle, car l'angle ADC étant $> \frac{1}{2}$A, on a AC > CD.

Cela posé, les triangles ABD et ACE étant équiangles, on a

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}. \qquad (1)$$

En remplaçant CE par CD, on obtient

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

En égalant deux expressions de la puissance du point A par rapport au cercle C, on a

$$AD.AE = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2;$$

puis, en remplaçant AE, AC, CD par les longueurs proportionnelles AD, AB, BD,

$$\overline{AD}^2 = AB.AE - BD.CD.$$

Même raisonnement pour la bissectrice extérieure AD' (GOULARD, *Bulletin de mathématiques élémentaires de Niewenglowski*, avril 1898).

II. Si l'on prolonge BA de AF = AC, on forme un triangle BD'F qui a pour bissectrice intérieure, pour côtés adjacents et pour segments de la base, la bissectrice extérieure D'A, les segments de la base D'B et D'F, et les côtés AB, AC du premier triangle ABC. Par suite, les propositions relatives à la bissectrice intérieure s'étendent à la bissectrice extérieure. (DÉSIRÉ ANDRÉ, NAM, 1874, p. 10).

9. *Note Bibliographique* pour la question 1147 (*Mathesis*, (2) VII, p. 279; VIII, p. 54), par M. H. Brocard. L'équation

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

se rencontre, avec l'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

dans un grand nombre de problèmes analogues à celui-ci.

Voir, par exemple, N. A. M. quest. 953 (A. Laisant); solution par

Digitized by Google

Moret-Blanc, 1872, 173; quest. 1338 (Lionnet), 1881, 373; N. C. M., quest. 233 (Ph. Breton); solutions 1877, 194 et 1879, 285 (E. Catalan); quest. 89 (E. Lucas); J. M. E, 1884, 15-19 (G. de Longchamps); N. C. M., 1878, 166-167. *Mathesis*, quest. 282 (G. de Rocquigny), 1886, 162; J. M. S., quest. 360 (E. Lemoine); solution par E. Catalan, 1893, 23; JMS., quest. 87, S. Realis, solut. par H. Brocard, 1893, 117-120 et A. Boutin, *Ibid.* 139-140; etc.

×10. ***Dernier chiffre des neuvièmes puissances*** (E. N. Barisien).

Les nombres

$$2^9,\ 3^9,\ 4^9,\ 5^9,\ 6^9,\ 7^9,\ 8^9,\ 9^9$$

sont terminés respectivement par les chiffres

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Il en résulte que le dernier chiffre de la neuvième puissance d'un nombre quelconque est celui de ce nombre.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours développé d'algèbre élémentaire, précédé d'un aperçu historique sur les Origines des Mathématiques élémentaires et suivie d'un recueil d'Exercices et de Problèmes, par B. Lefebvre, S. J. Tome I. Calcul algébrique; 1897. Tome II. Théorie des équations. Progressions et logarithmes; 1898. Namur, Ad. Wesmael-Charlier (2 vol. in-8° de XLIX-320 et 543 p.). Prix : 10 fr.

Recueil d'Exercices et de Problèmes d'Algèbre élémentaire par B. Lefebvre, S. J, Namur, Wesmael-Charlier, 1898 (167 p. in-8°). Prix : 2 fr.

Excellent recueil extrait de l'ouvrage précédent et que nous signalons à l'attention des professeurs. Voici les subdivisions de l'ouvrage. *Calcul algébrique :* quantités entières (30 pages); quantités fonctionnaires (23 pages); quantités irrationnelles (16 pages). *Équations*, du premier degré (45 pages); du second degré (28 pages). *Progressions, logarithmes, intérêts composés et annuités* (13 pages). Tables des logarithmes de 1 à 1000; racines carrées et racines cubiques, carrés et cubes des nombres entiers de 1 à 1004; tables diverses.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques suivie d'une *note sur la discussion des problèmes du premier degré*, par P. Brasseur, Professeur à l'école normale de Lierre. Neuvième édition, considérablement augmentée. Namur, Wesmael-Charlier, 1898 (85 p. in-8°). Prix : 1 fr. 25.

Nouvelle édition d'un opuscule déjà analysé antérieurement dans *Mathesis*, et où l'auteur a introduit de notables améliorations.

Digitized by Google

Cours de Géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, par N. CHARRUIT, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Lyon. Paris, Nony et Cie, 1898 (299 pages; 237 figures dans le texte). Prix : 5 fr.

Livre clair et simple, d'après un bon juge (M. Gérard). La question de l'existence du plan tangent n'est pas escamotée, comme d'ordinaire; l'auteur l'établit à part pour chaque surface considérée.

SOMMAIRE. But et procédés de la géométrie descriptive. I. *Géométrie descriptive.* 1. Représentation du point et de la droite; 2. Du plan; 3. Droites et plans rectangulaires; 4. Changements de plans de projections. II. *Géométrie cotée.* 1-2. Représentation du point, de la droite et du plan; 3. Droites et plans rectangulaires; 4. Méthodes générales; 5. Applications aux questions de distances et d'angles; 6. Polyèdres. III. *Représentation des lignes et surfaces* (Cylindres, cônes, sphère, surfaces de révolution; plans tangents). IV. Sections planes des surfaces (sphère, cylindre, cône; trièdre). *Notes.*

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, par M.J. TANNERY, sous-directeur des Études scientifiques à l'École normale supérieure et J. MOLK, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome III. Calcul intégral (1e partie). Théorèmes généraux. Inversion. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1898 (VIII-267 p. gr. in-8°). Prix : 8 fr. 50.

Le nom des auteurs recommande suffisamment ces *Éléments* qui sont avec le *Traité* de Halphen (resté inachevé) l'ouvrage le plus considérable publié en France sur la théorie des fonctions elliptiques. Le tome III traite surtout de la décomposition des fonctions elliptiques en éléments simples; de leurs développements en séries entières ou trigonométriques; de l'addition, de la multiplication; des intégrales des fonctions doublement périodiques; enfin de l'inversion.

The Twelfth and Concluding Memoir on the Theory of Screws, with a Summary (of the twelve Memoirs) by Sir Robert BALL, LL. D., D. Sc., F. R. S., Lowndean Professor of Astronomy and Geometry in the University of Cambridge. Reprinted from the Transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXXI (pp. 145--196), Dublin; Royal Irish Academy 1898 (In 4°).

Conférences sur les mathématiques, faites au Congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago, par Félix Klein, professeur à l'Université de Goettingue, associé étranger de l'Institut de France, recueillies par le professeur Alex Zuwet, traduites par M. L. Laugel, Paris, A. Hermann, 1898 (127 p. gr. in-8°). Prix : 6 francs.

Livre éminemment suggestif sur l'histoire récente des progrès des mathématiques dans leurs parties les plus élevées, que nous ne pouvons trop recommander aux aspirants au doctorat. En voici le sommaire :

1. Clebsch. 2-3. Lie. 4. Sur la véritable forme des courbes et des surfaces algébriques. 5. La théorie des fonctions et la géométrie. 6. Sur le caractère mathéma-

Digitized by Google

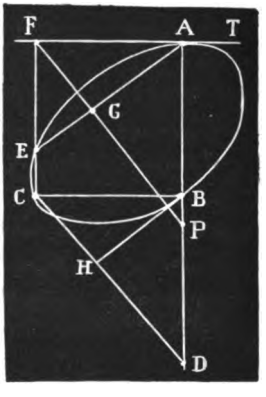
tique de l'intuition de l'espace et sur les relations des mathématiques pures avec les sciences d'application. 7. De la transcendance des nombres e et π. 8. Des nombres idéaux. 9. De la résolution des équations algébriques de degré supérieur. 10. Sur quelques progrès récents dans la théorie des fonctions hyperelliptiques et abéliennes. 11. Recherches les plus récentes sur la géométrie non euclidienne. 12. L'étude des mathématiques à Goettingue. *Supplément.* Le développement des mathématiques dans les Universités allemandes. — *Notes bibliographiques.*

RAYON DE COURBURE DES CONIQUES.

par M. A. Droz-Farny.

I. Dans l'*Educational Times*, juillet 1897, M. le professeur Neuberg a proposé l'intéressante question suivante (n° 13434) :

En un point A *d'une conique on mène la corde normale* AB ; *en* B *on mène la corde* BC *perpendiculaire à* BA, *et de C on abaisse une perpendiculaire* CD *sur la tangente* BH *en* B. *Cette perpendiculaire rencontre* AB *en un point* D. *Démontrer que* BD *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.



Il est facile de démontrer cette proposition, en utilisant les relations métriques données par M. Servais dans *Mathesis*, Année 1892, page 177.

Prenons pour axes coordonnés la tangente et la normale au point A de la conique ; l'équation de la courbe sera :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0$$

Soit ρ le rayon de courbure au point A, n la corde normale AB ; on trouve aisément :

$$\rho = -\frac{f}{a}; \quad n = -\frac{2f}{b}.$$

La parallèle menée par B à la tangente en A aura pour équation

$$y = -\frac{2f}{b},$$

d'où, pour les coordonnées du point C,

$$x = \frac{4fh}{ab}; \quad y = -\frac{2f}{b}.$$

La tangente en B ayant pour équation

$$2hx + by + 2f = 0,$$

Digitized by Google

on en déduit l'équation de CD :

$$\left(x - \frac{4fh}{ab}\right) b - \left(y + \frac{2f}{b}\right) 2h = 0.$$

En y faisant $x = 0$, on aura, pour l'ordonnée du point D,

$$y = -\frac{2f}{b} - \frac{2f}{a} = n + 2\rho,$$

et par conséquent :

$$BD = 2\rho.$$

II. Considérons maintenant comme conique une ellipse, et menons par C une parallèle à AB qui coupe la courbe en E et la tangente en A au point F. Si de F on abaisse sur AE une perpendiculaire FP qui rencontre la normale AB en P, il est facile de démontrer que $AP = BD = 2\rho$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points milieux des côtés AB, BC, CE, EA du trapèze inscrit ABCE. On sait que les droites $A\beta$, $B\delta$, $\alpha\gamma$ se coupent en un même point O. Or $\alpha\gamma$ et $A\beta$ étant des diamètres de la conique, O en est le centre; donc $B\delta$ est aussi un diamètre et par conséquent AE est parallèle à la tangente en B(*). Comme AF = BC, les triangles AFP et BCD sont égaux, d'ou AP = BD.

On a donc le théorème suivant :

En un point A *d'une ellipse, on mène la corde normale* AB *et la tangente* AF *; en* B *on mène la corde* BC *parallèle à* AF, *puis par* C *la corde* CF *parallèle à* AB *qui rencontre la conique et la tangente* AF *respectivement en* E *et* F ; *la perpendiculaire abaissée de* F *sur* AE *rencontre* AB *en* P. AP *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.

III. Il est facile de généraliser cette proposition.

Soient comme précédemment les points A, B, C; mais supposons le point E variable sur la conique.

En menant par C une corde variable CE'F' et en abaissant de F' la perpendiculaire F'g' sur la corde AE', on peut se demander l'enveloppe de F'g'. La série des points F' sur la tangente AT est perspective au faisceau des cordes CE'. Lorsque le point E' décrit la conique, les fais-

(*) Cette propriété se déduit de l'hexagone de Pascal AABBCE, ou nous écrivons AA et BB pour indiquer que deux côtés sont les tangentes en A et en B. (J. N.)

Digitized by Google

ceaux CE′ et AE′ sont homographiques; donc la ponctuelle F′ est homographique au faisceau AE′. On ramène ainsi la question au problème bien connu : Des points d'une ponctuelle on abaisse des perpendiculaires sur les rayons correspondants d'un faisceau homographique. Quelle est l'enveloppe de ces droites?

En règle générale, cette enveloppe est une parabole; car les perpendiculaires $F'g'$ déterminent sur la droite de l'infini $g\infty$ une ponctuelle homographique à la ponctuelle F′.

Dans notre exemple, les deux supports ont en leur point d'intersection des points correspondants des deux séries réunis; les ponctuelles sont donc perspectives et les droites $F'g'$ concourent en un point fixe. Il suffit pour constater ce qui précède de faire coïncider E′ avec B; alors CE′ devient parallèle à AT, F′ est à l'infini ainsi que la perpendiculaire $F'g'$.

Il est facile de fixer la position du centre du faisceau des droites $F'g'$. En faisant coïncider E′ avec A, la droite $F'g'$ coïncide avec la normale AB; le centre cherché est donc le point P du théorème précédent. On obtient ainsi un théorème qui se trouve déjà démontré d'une autre manière dans le mémoire de C. Pelz : *Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitten als Corollarien eines Steiner'schen Satzes*, et que voici :

En un point A *d'une ellipse, on mène la tangente* AF *et la corde normale* AB; *en* B *on mène la corde* BC *parallèle à la tangente* AF. *Si l'on joint le point* C *à un point variable* E *de la conique, la corde* CE *rencontre la tangente en* F *et la perpendiculaire* FP *abaissée de* F *sur* AE *rencontre la normale* AB *en un point fixe* P *tel que* AP *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 815.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56).

Les formules

$$x=\frac{a_1t^2+2b_1t+c_1}{a_3t^2+2b_3t+c_3},\quad y=\frac{a_2t^2+2b_2t+c_2}{a_3t^2+2b_3t+c_3},\qquad (1)$$

Digitized by Google

où t désigne un paramètre variable, définissent une conique. Trouver l'équation de cette conique en coordonnées cartésiennes et en coordonnées tangentielles. Déduire directement, des formules (1), *les conditions nécessaires pour que la courbe soit une ellipse, une circonférence, une hyperbole un système de deux droites, une parabole. Étant donnée l'équation*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

trouver des expressions rationnelles de la forme (1) *qui puissent la remplacer.*

Solution par M. STUYVAERT. 1° Si l'on désigne les coordonnées par $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, les formules (1) peuvent être remplacées par celles-ci :

$$a_1t^2 + 2b_1t + c_1t^0 = Kx_1,$$
$$a_2t^2 + 2b_2t + c_2t^0 = Kx_2,$$
$$a_3t^2 + 2b_3t + c_3t^0 = Kx_3,$$

K étant un facteur de proportionnalité. Ces égalités donnent, en employant une notation qui s'explique d'elle-même,

$$t^2 = K\frac{|x, b, c|}{|a, b, c|}, \quad 2t = K\frac{|a, x, c|}{|a, b, c|}, \quad t^0 = K\frac{|a, b, x|}{|a, b, c|};$$

en égalant le carré de la seconde valeur au quadruple produit des valeurs de t^0 et t^2, on trouve l'équation cartésienne de la courbe :

$$|a, x, c|^2 = 4|x, b, c||a, b, x|.$$

2° Les points d'intersection de la conique avec la droite

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

sont déterminés par l'équation

$$u_1(a_1t^2 + 2b_1t + c_1) + u_2(a_2t^2 + 2b_2t + c_2) + u_3(a_3t^2 + 2b_3t + c_3) = 0 \quad (2)$$

Pour que la droite soit tangente, l'équation précédente doit donner pour t deux valeurs égales. On en conclut l'équation tangentielle de la courbe :

$$(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)^2 = (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3).$$

3° Les points à l'infini de la courbe correspondent à $x_3 = 0$, ou aux valeurs de t racines de l'équation

$$a_3t^2 + 2b_3t + c_3 = 0;$$

par conséquent, la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $b_3^2 - a_3c_3$ est inférieur, supérieur ou égal à zéro.

Digitized by Google

4° Pour avoir un système de deux droites, nous exprimons que l'équation donnant les points d'intersection d'une droite avec la courbe est indéterminée, ou que les coefficients de l'équation (2) ordonnée par rapport à t sont nuls :

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0, \quad b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3=0 \quad c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0.$$

Pour que ces égalités soient compatibles, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5° La courbe sera une circonférence, si elle passe par les points cycliques représentés par les équations $x_3=0, x_2=ix_1$ $(i=\pm\sqrt{-1})$; cette condition s'exprime par les égalités

$$a_3t^2+2b_3t+c_3=0,$$

$$(a_2-a_1i)\,t^2+2\,(b_2-b_1i)\,t+c_2-c_1i=0.$$

En éliminant t, on trouve

$$(B_1-B_2i)^2=4\,(A_1-A_2i)\,(C_1-C_2i),$$

pourvu que $A_1, B_1, \ldots$ désignent les mineurs du déterminant (a,b,c). La dernière relation se décompose en deux autres :

$$B_1^2-B_2^2=4\,(A_1C_1-A_2C_2), \quad B_1B_2=4\,(A_1C_2+A_2C_1).$$

On arrive aux mêmes résultats en partant de l'équation cartésienne de la courbe qu'on peut écrire ainsi :

$$(B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3)^2-4\,(A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3)\,(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3)=0.$$

6° Cette dernière équation montre que les droites représentées par

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=0, \quad C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=0, \quad B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3=0$$

sont, respectivement, les tangentes en deux points C, A de la courbe et la corde CA. De même, de l'équation tangentielle (2°) on déduit que (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3) sont les coordonnées de deux points A, C de la courbe et que b_1, b_2, b_3 sont celles du pôle B de la droite AC; dans les formules (1), les points A et C correspondent à $t=\infty$ et $t=0$.

Cela posé, si l'on donne l'équation d'une conique en coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3), on choisit arbitrairement deux points A et C sur le courbe; soit B le pôle de la droite AC. Les coordonnées (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3), (b_1, b_2, b_3) des points A, C, B sont les coefficients qui entrent

Digitized by Google

dans les formules (1); ces coordonnées n'étant déterminées qu'à des facteurs de proportionnalité près, on fera en sorte que l'équation tangentielle de la courbe soit identique à l'équation

$$(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)^2 - (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) = 0.$$

Il y a donc une infinité de formules de l'espèce (1), propres à représenter une même conique. Ce fait résulte aussi de ce qu'on peut remplacer t par $\frac{\alpha t' + \beta}{\gamma t' + \delta}$ sans que la forme des égalités (1) change, t' désignant un nouveau paramètre arbitraire.

×Question 1029.

(Voir *Mathesis*, (2), t. V, p. 176).

Soient O *le centre et* AB *une corde quelconque d'une ellipse donnée. Trouver le maximum de l'aire du triangle* OAB : 1° *lorsque la droite* AB *se déplace parallèlement à elle-même*; 2° *lorsqu'elle pivote autour d'un point fixe.* (V. Cristesco).

Solution par M. Jean Jonesco. I. Résolvons d'abord la question pour une circonférence Δ, de centre O et de rayon R.

Si x est la distance de O à AB, il faut rendre maximum le produit $x^2(R^2 - x^2)$, dont les deux facteurs ont une somme constante. Ce maximum a lieu lorsque la différence $R^2 - 2x^2$ des deux facteurs est minimum, d'après l'identité

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Or cette différence est nulle pour $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$; donc le triangle OAB a sa plus grande valeur lorsque AB est égal au côté du carré inscrit. Soit Δ′ la circonférence de centre O et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Si la corde AB a une direction donnée, le problème est résolu par les cordes de Δ, tangentes à Δ′ et parallèles à la direction donnée. Si elle doit passer par un point donné P, situé à l'extérieur du cercle Δ′, on mène par P les deux tangentes à Δ′. On n'a plus qu'une solution lorsque P est sur la circonférence Δ′.

Supposons maintenant P à l'intérieur du cercle Δ′. Le maximum de

Digitized by Google

$x^2(R^2 - x^2)$ correspond au minimum de $R^2 - 2x^2$ ou au maximun de x. La corde cherchée AB est, par suite, perpendiculaire à OP.

II. En considérant l'ellipse donnée E comme étant la projection d'une circonférence et en appelant E′ l'ellipse tangente aux cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués, on voit que la corde cherchée est tangente à E′ ; cependant, lorsqu'elle doit passer par un point donné à l'intérieur de E′, elle est conjuguée avec le diamètre passant par ce point.

Ont résolu la même question MM. Seligmann, Droz Farny, Merlin, Déprez, Colart, Barisien, Mandart et Bogdan Jonesco.

Question 1118.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 102).

Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle rectangle isoscèle variable, qui reste homothétique à lui-même, sachant qu'une extrémité de l'hypoténuse se meut sur une circonférence donnée, et que le sommet de l'angle droit se meut sur le diamètre parallèle à l'hypoténuse.

(Soons.)

Solution par MM. Colart, Retali, Maes (Gand), Droz Farny, Déprez, Barisien et Libert. Si l'on prend pour axe des x le diamètre parallèle à l'hypoténuse BC, cette hypoténuse sera double de l'ordonnée de l'une de ses extrémités, de sorte que, si l'abscisse de C est x, celle de B sera $x + 2y$ ou $x - 2y$ suivant la direction de l'hypoténuse, et si B décrit le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, le point C décrira l'ellipse

$$(x \pm 2y)^2 + y^2 = R^2,$$

concentrique au cercle donné; l'un des axes de symétrie fait avec le diamètre fixe un angle de 22°30′.

Remarques. I. Si l'on remplace le triangle rectangle par un triangle quelconque, et le cercle directeur par une conique quelconque, l'équation du lieu sera

$$Ay^2 + B(x \pm my)y + C(x \pm my)^2 + Dy + E(x \pm my) + F = 0,$$

ou

$$(A \pm Bm + Cm^2)y^2 + (B \pm 2Cm)xy + Cx^2 + (D \pm Em)y + Ex + F = 0.$$

Digitized by Google

C'est une conique de même nature que la courbe directrice; car le binôme caractéristique se réduit à $B^2 - 4AC$.

En particulier, si la directrice est une droite $Dy + Ex + F = 0$, le lieu cherché est la droite

$$(D \pm Em)\, y + Ex + F = 0.$$

Ces deux droites se coupent sur l'axe des x.

Si la directrice est un cercle, on a $A = C$, $B = 0$ et le lieu cherché est l'ellipse

$$A(1 + m^2)\, y^2 \pm 2Amxy + Ax^2 + (D \pm Em)\, y + Ex + F = 0.$$

(Déprez, E. Colart.)

II. Les milieux des côtés du triangle mobile et le centre de gravité décrivent chacun une ellipse. (Barisien.)

Note. M. Schiappa Monteiro observe que la question 1118 est un cas particulier de théorèmes présentés par Poncelet dans le tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* et qu'elle se ramène aussi à une question proposée dans le *Journal de Bourget*, 1881, et traitée par lui dans le *Journal das Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. III, p. 1. Nous extrayons de sa solution les remarques suivantes. 1° Si PQ est le diamètre du cercle donné sur lequel glisse le sommet A du triangle rectangle isoscèle ABC dont le sommet B parcourt la circonférence, et qu'on mène la corde BB′ perpendiculaire à PQ, AC passe par B′ et l'on a BC = BB′; d'où une seconde génération du lieu demandé. 2° Si l'on fait coïncider A avec le centre O du cercle donné, AB et AC coïncident avec les rayons $O\beta$, $O\gamma$ inclinés de 45° sur PQ et γ est un point du lieu. Donc OQ et $O\gamma$ représentent deux diamètres égaux de l'ellipse; par suite un axe de symétrie est dirigé suivant la bissectrice de l'angle γOQ. 3° Pour démontrer la question 1118, on peut considérer la circonférence donnée ε comme la courbe d'entrée commune de deux cylindres Σ et Σ'; la courbe de sortie sera une ellipse ε'. Pour trouver la projection horizontale de ε', on coupe Σ et Σ' par un plan P parallèle à la fois aux génératrices des deux cylindres. Si nous supposons que BB′ est la trace d'un tel plan et que les projections horizontales des génératrices de Σ et Σ' sont respectivement parallèles à PQ, et font l'angle de 45° avec PQ, C sera la projection horizontale d'un point de ε', etc.

Digitized by Google

Question 1143.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 261).

On considère tous les limaçons de Pascal, ayant pour équation polaire

$$\rho = a\cos\theta + b.$$

1° *Si* a *est fixe et* b *variable, et si l'on mène par le point double* O *une sécante qui rencontre la courbe en* P *et* Q, *montrer que, pour tous les limaçons de la série, les tangentes en* P *et* Q *se rencontrent sur une droite fixe.*

2° *Si* a *et* b *sont constants, et si la droite* OPQ *est mobile, les tangentes en* P *et* Q *se rencontrent sur une cubique dont on demande de trouver l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.* (E. N. Barisien).

Solution par M. Audibert. Les coordonnées cartésiennes du point P étant

$$y = (a\cos\theta + b)\sin\theta, \quad x = (a\cos\theta + b)\cos\theta,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos 2\theta + b\cos\theta}{a\sin 2\theta + b\sin\theta},$$

et l'équation de la tangente en P s'écrira

$$y(a\sin 2\theta + b\sin\theta) + x(a\cos 2\theta + b\cos\theta) = (a\cos\theta + b)^2.$$

En changeant θ en $\theta + \pi$, on aura l'équation de la tangente au point Q,

$$y(a\sin 2\theta - b\sin\theta) + x(a\cos 2\theta - b\sin\theta) = (a\cos\theta - b)^2.$$

Retranchant et ajoutant, on a

$$y\sin\theta + x\cos\theta = 2a\cos\theta, \tag{1}$$

$$y\sin 2\theta + x\cos 2\theta = \frac{a^2\cos^2\theta + b^2}{a}. \tag{2}$$

1° Ces deux dernières droites se rencontrent au point d'intersection des deux tangentes; la première (1) étant indépendante de la variable b représente le lieu de ces points.

2° Si a et b sont constants, l'élimination de θ entre (1) et (2) donne l'équation de la cubique :

$$y^2 = \frac{(2a - x)^2(b^2 + ax)}{3a^2 - b^2 - ax}.$$

Dans le cas $a > b$ les deux branches symétriques de la courbe, par-

Digitized by Google

ties du point $\left(y=0,\ x=-\frac{b^2}{a}\right)$, se croisent au point $(y=0,\ x=2a)$, qui est double et vont à l'asymptote

$$3a^2 - b^2 - ax = 0.$$

Si l'on a $a < b$, les deux branches vont à l'asymptote sans se croiser au point double, qui, situé au-delà de l'asymptote, n'appartient pas à la courbe.

On tire de (1) et (2)

$$x = \frac{3a^2\cos^2\theta - b^2}{a}, \quad dx = -6a\sin\theta\cos\theta d\theta,$$

$$y = \frac{\cos\theta}{a\sin\theta}(2a^2 + b^2 3 - a^2\cos^2\theta), \quad \text{d'où}$$

$$S = 2\int_{-\frac{b^2}{a}}^{\frac{3a^2-b^2}{a}} y dx = 12(2a^2 + b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta - 36a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$S = \frac{3\pi}{4}(4b^2 - a^2).$$

Question 1148.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 279).

On donne : 1° *une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes;* 2° *une parabole variable ayant pour foyer un point* F *de l'axe non transverse, pour axe une parallèle à une des asymptotes et pour ordonnée au foyer* (ou pour paramètre) *la distance de* F *aux asymptotes.*

On demande le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle des trois points d'intersection des deux courbes. (H. Brocard)

Solution par M. A Goulard (Marseille). Soit (1)

$$xy = k^2$$

l'équation de l'hyperbole, et soient $(\alpha, -\alpha)$ les coordonnées du point F. Il y a deux paraboles ayant pour foyer F, pour axe la parallèle à l'axe des x, et pour paramètre la valeur absolue de α. On trouve, après quelques calculs faciles, que les équations de ces paraboles peuvent s'écrire

$$y(y + 2\alpha) = \pm 2\alpha(x - \alpha). \quad (2)$$

Digitized by Google

En divisant membre à membre les équations (1) et (2), il vient, après suppression du facteur y,

$$\frac{x}{y+2\alpha} = \pm \frac{k^2}{2\alpha(x-\alpha)},$$

ou

$$2\alpha x(x-\alpha) = \pm k^2(y+2\alpha);$$

ce sont les équations de deux coniques qui passent par les trois points d'intersection à distance finie de l'hyperbole avec chaque parabole. Les équations des cercles qui passent par ces trois points sont alors

$$2\alpha[x(x-\alpha)+y(y+2\alpha)] = \pm[k^2(y+2\alpha)+4\alpha^2(x-\alpha)].$$

Les équations des centres sont

$$2x-\alpha = \pm 2\alpha, \quad 4\alpha(y+\alpha) = \pm k^2.$$

L'élimination de α donne les lieux des centres :

$$8x(2x+3y) = k^2,$$

et

$$8x(2x-y) = k^2.$$

Ce sont deux hyperboles qui admettent l'axe des y pour asymptote commune, et qui se coupent sur l'axe des x aux points $x = \pm\frac{k}{4}$. La première ne coupe pas l'hyperbole donnée; la deuxième la rencontre aux point $x = \pm\frac{3k}{4}$, $y = \pm\frac{4k}{3}$.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Déprez et Audibert.

Remarques. I. Le lieu du centre de gravité du triangle considéré se compose de quatre droites. (Barisien, Déprez.)

II. Le lieu du centre du cercle des neuf points se compose de quatre hyperboles. (Barisien, Déprez.)

III. Si le point F décrit l'axe transverse de l'hyperbole donnée, le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle considéré se compose encore de quatre hyperboles. (Barisien.)

IV. Le cercle des neuf points enveloppe une podaire d'hyperbole. (Déprez.)

Digitized by Google

Question 1151.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 31).

Trouver deux cubes entiers consécutifs dont la différence soit un nombre triangulaire.

Démontrer que la différence de deux cubes entiers consécutifs de même parité n'est jamais un nombre triangulaire. (G. de Rocquigny).

Solution par MM. H. Brocard et Boutin. I. Si de l'équation

$$(x+1)^3 - x^3 = \frac{y(y+1)}{2}$$

on tire x, on voit qu'il faut que

$$6y^2 + 6y - 3 = t^2$$

ou que

$$6t^2 + 27 = u^2,$$

équation résolue par les valeurs

$$t = 3,\quad 33,\quad 327,\quad 3237,\quad 32043,\cdots$$
$$u = 9,\quad 81,\quad 801,\quad 7929,\quad 78489,\cdots$$

d'où

$$x = \frac{t-3}{6},\quad y = \frac{u-3}{6}$$

avec la relation de récurrence

$$V_n = 10V_{n-1} - V_{n-2}$$

qui existe entre les valeurs de t et de u.

II. La différence de deux cubes de même parité est de la forme

$$(x+1)^3 - (x-1)^3 \quad \text{ou} \quad 6x^2 + 2.$$

On devrait donc avoir

$$6x^2 + 2 = \frac{y(y+1)}{2}$$

ou, en multipliant par 8 et ajoutant 1,

$$48x^2 + 17 = (2y+1)^2.$$

Mais $48x^2 + 17$ est de la forme $3n + 2$ et ne saurait donc être un carré.

Digitized by Google

Question 1154.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VIII, p. 31).

Soit ABC *un triangle inscrit dans une conique* Σ. *Représentons par* α *le point de Frégier de* A (*point de concours de hypoténuses des triangles rectangles inscrits à* Σ *et ayant le sommet de l'angle droit en* A), *par* α′ *le pôle de* BC.

1° *Les droites* αα′, ββ′, γγ′ *concourent en un point* P.

2° *La conique* Σ *est la transformée isogonale* (*par points inverses*) *de la polaire de* P. (Droz-Farny.)

Solution par MM. A. Boutin, G. Gérard (Liége) et Déprez. Prenons ABC pour triangle de référence, et soit l'équation de Σ :

$$(\Sigma) \qquad \frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{y}+\frac{\nu}{z}=0.$$

Le point de Frégier de A est sur la normale en A, c'est-à-dire sur la droite :

$$(1) \qquad (\nu\cos A-\mu)\,y+(\nu-\mu\cos A)z=0;$$

la perpendiculaire en A à AB, $y+z\cos A=0$, coupe Σ en un point D, tel que l'équation de BD est

$$(2) \qquad \lambda z=\frac{x}{\cos A}(\mu-\nu\cos A).$$

On en déduit, pour les coordonnées normales de α,

$$\frac{x}{\lambda\cos A}=\frac{y}{\nu-\mu\cos A}=\frac{z}{\mu-\nu\cos A}.$$

Le pôle de BC est le point dont les coordonnées sont :

$$\frac{x}{-\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}.$$

L'équation de αα′ est donc :

$$x(\nu^2-\mu^2)-\lambda\mu y+\lambda\nu z=0.$$

Les équations de ββ′ et γγ′, s'obtiendront par permutation circulaire, et l'on constate aisément que le déterminant des coefficients est nul; ces droites sont donc concourantes. Les coordonnées de P sont telles que

$$\frac{x}{\lambda(\mu^2+\nu^2-\lambda^2)}=\frac{y}{\mu(\lambda^2+\nu^2-\mu^2)}=\frac{z}{\nu(\lambda^2+\mu^2-\nu^2)}.$$

Ce point est bien le pôle de la droite $\lambda x+\mu y+\nu z=0$, transformée isogonale de Σ.

Digitized by Google

×Question 1157.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 55).

Résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$2^{x+1} + 2^x + 1 = u^2. \qquad \text{(De Rocquigny.)}$$

Solution par MM. J. Jonesco, Colart (Huy), Soons (Tirlemont), Barbette et Demanet. L'équation peut s'écrire

$$3.2^x = u^2 - 1 = (u+1)(u-1). \tag{1}$$

On doit donc avoir $u = 3m \pm 1$. L'équation précédente devient alors :

$$2^x = 3m^2 \pm 2m = m(3m \pm 2).$$

On voit immédiatement que m doit être pair, sauf pour $x = 0$, qui donne $u = 2$. Soit $m = 2n$. On aura

$$2^{x-2} = n(3n \pm 1).$$

Pour $n > 1$, cette équation est impossible, car n et $3n \pm 1$ ne peuvent pas être pairs à la fois. Pour $n = 1$ on obtient $2^{x-2} = 2$ ou $2^{x-2} = 4$, qui donnent $x = 3$ et $x = 4$. Les valeurs correspondantes de u sont 5 et 7. Par conséquent, les solutions sont : $x = 0, 3, 4$; $u = 2, 5, 7$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×1169. Résoudre le système.

$$\operatorname{tg}(y+z) = a \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(z+x) = b \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = c \operatorname{tg} z.$$

×1170. Soit un triangle ABC; on prolonge le côté AB d'une longueur BD = AB et l'on joint DC. On élève sur le milieu de CD une perpendiculaire qui rencontre le cercle ABC en deux points E et F. Démontrer que B est le milieu du segment déterminé sur BC par les droites AE et AF. (A. Gob).

×1171. Si l'angle A d'un triangle sphérique ABC est égal à 120°, la longueur d de la bissectrice AD de l'angle A est donnée par

$$\operatorname{cotg} d = \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c \qquad \text{(J. Déprez.)}$$

1172. On donne sur une même droite Ox les points A, A', B, B'. Une parabole donnée P se meut de manière qu'elle passe constamment par le point O, et que son axe reste parallèle à Oy.

Soient M, M' les extrémités des diamètres de P menés par A, A'. Les droites MB et M'B' se coupent en un point N. Trouver le lieu décrit par N et chercher les conditions nécessaires pour que ce lieu soit égal à une parabole donnée P'. (Petit-Bois.)

Digitized by Google

Vient de paraître:

Mélanges mathématiques (1883-1898), par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, etc. In-8° de 216 pages. Prix. . . . . 5 francs.

TABLE DES MATIÈRES.

(*B* = DEUXIÈME PARTIE).

	Pages.
Histoire. Sur une table du papyrus Rhind	1-3, B, 55
Sur l'enseignement élémentaire de l'algèbre en 1676, d'après l'Euclide de Henrion	113-116
Copernic.	74-79
Sur les raisons données par Copernic en faveur du mouvement de la Terre	101-104
Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes .	104-110
Sur une opinion de Galilée relative à la chute des corps	110-112
Esquisses biographiques. Kummer (1810-1893), Weierstrass (1815-1897), Kronecker (1823-1891)	B, 34-37
Catalan (1814-1894) et Gilbert (1832-1892).	B, 37-38
Sylvester (1814-1897) et Cayley (1821-1895)	B, 39-42
H. S. Smith (1826-1883)	149-157
A. Ribaucour (1845-1893)	B, 14-17
Analyse algébrique. Méthode des coefficients égaux de Clasen pour la résolution des équations linéaires.	6-15
Sur l'extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations algébriques	24-27
Sur la théorie des racines égales	81-83
Sur l'éliminant de deux équations algébriques	97-99
Sur la définition des invariants et covariants.	3-5
Analyse infinitésimale. Formule d'Ozanam	B, 1-6, 56
Sur l'emploi du signe Σ dans la théorie des fonctions	30-32
Limite ou génératrice (Voir note, B, 56)	B, 11-14
Sur la formule de Leibniz.	B, 9-11
Sur une formule de M. Darboux	30-3
Sur la formule de quadrature de Gauss	87-88
Sur le calcul approché d'une intégrale définie, $\Gamma(\frac{1}{2})$.	15-16
Démonstration élémentaire de la relation qui lie les deux Eulériennes .	117-120
Sur la fonction gamma	83-86
Sur deux formules relatives aux Eulériennes.	99-101
Deux remarques sur les fonctions elliptiques.	27-29
Sur les intégrales elliptiques de troisième espèce	147-148

Digitized by Google

Pages.

Mécanique. Sur les principes de la mécanique rationnelle 69-74
Sur l'inutilité de la considération de l'espace dit réel en mécanique . . 120-122
Sur les principes de la mécanique rationnelle et de la mécanique physique 145-147
Sur la mesure du temps 112

Calcul des probabilités. Sur le sens du mot hasard en calcul des probabilités 93-96
Sur le théorème de Jacques Bernoulli 79-81, 159-160
Sur la loi des grands nombres en calcul des probabilités 93-95
Sur la méthode des moindres carrés 96
Problème de calcul des probabilités 112

Géométrie euclidienne et non euclidienne. (**Histoire**). Sur les postulats et les axiomes d'Euclide 37-47
Analyse des recherches de Saccheri sur le postulatum d'Euclide. . . 47-61
Sur la géométrie non euclidienne (Ampère, Fourier, De Tilly) . . . 93-36
Sur l'histoire de la géométrie non euclidienne . . . . . 65-66, B, 55
Sur les recherches de Schering et de Gauss en métagéométrie . . 67 69, B, 55

(**Principes**). Sur la portée philosophique de la métagéométrie . . . 89-92
Sur la métagéométrie et ses trois subdivisions 126-128
Sur les premiers principes de la métagéométrie et de la géométrie riemannienne . . . . . B, 17-20
Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann . 122-125
Méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non euclidienne . . . . . 142-143, B, 21-34
Relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne (Théorème des six points). 61-64
Relations entre les distances de cinq ou six points en géométrie euclidienne et en géométrie non euclidienne. 129-136
Nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne. 136-137
Sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non euclidienne 144-145
Le plan riemannien est-il identique à la sphère euclidienne? . . . 137-142
Pour la géométrie non euclidienne . . . . . B, 43-54
Le plus court chemin sur la sphère . . . . . B, 7-8

Digitized by Google

SUR DEUX TRANSVERSALES REMARQUABLES DU TRIANGLE;

par M. A. Gob, professeur à l'Athénée de Hasselt.

1. Par les trois sommets A, B, C d'un triangle on mène les droites AA', BB', CC' rencontrant les côtés opposés aux points A', B', C' sous un même angle θ (le sens de rotation étant le même). Nous nous proposons de déterminer l'angle θ par la condition que les points A', B', C' soient en ligne droite.

Les triangles AA'B, AA'C donnent

$$\frac{BA'}{\sin(B+\theta)} = \frac{AA'}{\sin B}, \quad \frac{CA'}{\sin(\theta - C)} = \frac{AA'}{\sin C};$$

par conséquent,

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\sin C \sin(\theta + B)}{\sin B \sin(\theta - C)} = \frac{\cot B + \cot\theta}{\cot C - \cot\theta}. \qquad (1)$$

Pour que les points A', B', C' soient en ligne droite, on doit donc avoir

$$\sin(\theta+A)\sin(\theta+B)\sin(\theta+C) = -\sin(\theta-A)\sin(\theta-B)\sin(\theta-C),$$

ou

$$(\cot\theta + \cot A)(\cot\theta + \cot B)(\cot\theta + \cot C) = (\cot\theta - \cot A)(\cot\theta - \cot B)(\cot\theta - \cot C).$$

On en déduit

$$\cos^2\theta = -\cos A \cos B \cos C, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}^2\theta = -(\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B), \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}^2\theta = -\cot\omega \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

ω étant l'angle de Brocard du triangle A B C.

L'angle θ n'est réel que si le triangle est obtusangle; il a alors deux valeurs supplémentaires, qui correspondent à deux transversales A' B' C' et A'' B'' C'' dont les points de rencontre A' et A'', B' et B'', C' et C'' avec les côtés du triangle sont symétriques respectivement par rapport aux pieds D, E, F des hauteurs.

2. Soient O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Le cercle conjugué à ABC a pour centre l'orthocentre H, et son rayon ρ, égal à $\sqrt{HA \cdot HD}$, a pour expression

$$\rho = 2R\sqrt{-\cos A \cos B \cos C} = 2R\cos\theta.$$

Digitized by Google

Remarquons aussi la formule

$$HO = R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C} = R\sqrt{1 + 8\cos^2\theta}.$$

On sait que les cercles H, O et le cercle de neuf points O_9 ont une corde commune MM', et que H est le centre de similitude externe des cercles O et O_9. Soit N le second point de rencontre du cercle O avec la droite HM; N et M étant des points homologues des cercles O et O_9, on a

$$HM = \tfrac{1}{2}HN, \quad \text{d'où} \quad MN = HM = \rho = 2R\cos\theta.$$

On en conclut que l'angle $OMN = \theta$; donc θ ***est l'angle sous lequel se coupent le cercle circonscrit et le cercle conjugué.***

La droite MO_9 étant parallèle à ON, l'angle O_9MO est égal à

$$\pi - HMO_9 - OMN = \pi - 2\theta;$$

par suite, ***les cercles*** O ***et*** O_9 ***se coupent sous l'angle*** 2θ.

3. Soit P le pôle de la droite A' B' C' par rapport au cercle H; A étant le pôle de BC, AP est la polaire de A' et coupe BC en un point A_1'' pôle de AA'; HA_1 est donc perpendiculaire à AA' et par suite fait avec BC l'angle $\frac{1}{2}\pi - \theta$. On en conclut que ***si l'on mène par*** H ***trois droites faisant avec*** BC, CA, AB ***dans un même sens de rotation l'angle*** $\frac{1}{2}\pi - \theta$, ***ces droites coupent ces côtés en trois points*** A_1, B_1, C_1 (***ou*** A_2, B_2, C_2) ***tels que les droites*** AA_1, BB_1, CC_1 (***ou*** AA_2, BB_2, CC_2) ***concourent en un même point*** P, ***pôle de*** A'B'C' ***par rapport au cercle conjugué*** (***ou en un même point*** P', ***pôle de*** A''B''C'').

4. Appelons Δ et Δ' les transversales A'B'C' et A''B''C''.

Soient Δ_1 et Δ'_1 leurs transversales réciproques et désignons par B_1'' et C_1'' les points de rencontre de Δ_1' avec AC et AB. Les triangles BB''C et CC''B donnent

$$AB_1'' = CB'' = a\frac{\sin(\theta - C)}{\sin\theta}, \quad AC_1'' = BC'' = a\frac{\sin(\theta + B)}{\sin\theta}.$$

Or les angles A'AC et A'AB sont égaux respectivement à $\theta - C$ et à $180^\circ - (\theta + B)$; on a donc

$$\frac{AB_1''}{AC_1''} = \frac{\sin A'AC}{\sin A'AB}.$$

Donc ***la droite*** AA' ***est une symédiane du triangle*** $AB_1''C_1'$.

Digitized by Google

5. Soit $mx + ny + pz = 0$ l'équation de Δ_1' en coordonnées normales. L'équation de la parallèle menée par A à Δ_1' s'obtient en éliminant x entre cette équation et l'équation de la droite de l'infini ; on obtient ainsi

$$y(na - mb) + z(pa - mc) = 0.$$

La médiane du triangle $AB_1''C_1''$ est la conjuguée harmonique de cette droite par rapport à l'angle BAC ; son équation est donc

$$y(na - mb) - z(pa - mc) = 0.$$

L'équation de la symédiane AA′ du triangle $AB_1''C_1'$ est donc

$$y(pa - cm) + z(mb - na) = 0.$$

L'équation de la droite A′B′C′ est par conséquent

$$x(nc - pb) + y(pa - mc) + z(mb - na) = 0. \qquad (*)$$

On voit donc que *les droites* Δ *et* Δ′ *passent par le point de Lemoine et que chacune d'elles passe par l'inverse triangulaire du pôle trilinéaire de la transversale réciproque de l'autre.*

On déduit aussi de là que *la droite* PP′ *est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle conjugué.*

SUR UN GROUPE DE TROIS PARABOLES(**) ;

par M. J. Neuberg.

1. Par les trois sommets d'un triangle ABC, nous menons trois droites AA′, BB′, CC′ faisant avec les côtés opposés, dans un même sens de rotation, un même angle θ. Soient A′, B′, C′ les points où elles rencontrent les côtés, et MNP le triangle formé par ces droites. Nous désigneront par AA″, BB″, CC″ les symétriques des droites AA′, BB′, CC′ par rapport aux hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC ; elles font avec les côtés de ABC l'angle $\pi - \theta$.

(*) Si l'on suppose que l'équation $mx + ny + pz = 0$ représente une droite quelconque, on a le théorème suivant : *Si une droite rencontre les côtés du triangle en* M, N, P, *les symédianes* AM′, BN′, CP′ *des triangles* ANP, BMP, CMN *rencontrent les côtés correspondants du triangle en trois points* M′, N′, P′ *qui sont sur une même droite passant par le point de Lemoine et par l'inverse du pôle trilinéaire de la droite* MNP.

(**) Cet article fait suite, en quelque sorte, aux recherches de M. Gob sur deux transversales remarquables du triangle.

Digitized by Google

Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point lorsque $\theta = \frac{1}{2}\pi$; elles se confondent alors avec les hauteurs et le triangle MNP se réduit à l'orthocentre H.

Le triangle MNP est directement semblable à ABC. Les côtés sont égaux aux doubles des projections des côtés homologues de ABC sur AA′, BB′, CC′ (Voir Cesaro, *Mathesis*, (1) V, pp. 128 et 134); le rapport de similitude est donc égal à $2\cos\theta$.

Les sommets M, N, P se meuvent sur les circonférences circonscrites aux triangles BCH, CAH, ABH.

3. Lorsque l'angle θ varie, les distances DA′, EB′, FC′ sont toujours proportionnelles aux hauteurs AD, BE, CF; donc les points A′, B′, C′ engendrent des ponctuelles semblables. Il en résulte que les droites B′C′, C′A′, A′B′ enveloppent trois paraboles π_a, π_b, π_c, qui sont respectivement tangentes aux trois côtés des triangles AEF, BFD, CDE.

Le point de contact de AB avec π_a est la position de C′ lorsque B′ coïncide avec A; c'est donc le symétrique F′ de A par rapport à F; de même le point de contact de AC est le symétrique E′ de A par rapport à E. De là on conclut facilement que π_a touche FE en son milieu D_1. Or AD_1 est un diamètre de π_a et une symédiane de ABC; donc *les axes des paraboles* π_a, π_b, π_c *sont parallèles aux symédianes* AK, BK, CK *du triangle* ABC.

Le foyer φ_a de la parabole π_a se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle circonscrit AFE, et aussi sur l'isogonale du diamètre AD_1 par rapport à l'angle FAE. Cette isogonale étant la médiane AG de ABC, et AH étant un diamètre du cercle AEF, *les foyers des paraboles* π_a, π_b, π_c *sont les projections de l'orthocentre* H *sur les médianes* AG, BG, CG *ou les intersections des médianes avec le cercle de diamètre* HG. Ces points jouissent d'une foule d'autres propriétés intéressantes (voir *Mathesis*, (1) X, p. 166).

Soient S, T les projections de φ_a sur AB, AC; la droite ST est la tangente au sommet de π_a. Le demi-paramètre p_a de cette parabole est double de la hauteur du triangle $\varphi_a ST$ issue de φ_a. Comme $A\varphi_a$ est le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$p_a = 2A\varphi_a \sin \varphi_a ST \sin \varphi_a TS = 2A\varphi_a \sin CAG \sin BAG.$$

Si l'on prolonge la médiane AM d'une longueur MQ égale à elle-même, le triangle ACQ donne

$$\frac{\sin A}{2m_a} = \frac{\sin CAG}{c} = \frac{\sin BAG}{b}.$$

Digitized by Google

On en déduit

$$p_a = 2A\varphi_a \frac{bc \sin^2 A}{4 m_a^2},$$

ou, à cause de $A\varphi_a = AH \sin AMB = 2R \cos A \sin AMB$:

$$p_a = \frac{abc}{4 m_a^2} \sin 2A \sin AMB = \frac{2S^2 \cos A}{m_a^2}.$$

3. Les paraboles π_a, π_b qui ont la tangente commune AB, ont deux autres tangentes communes. Ces droites correspondent au cas où les points A′, B′, C′ sont en ligne droite et par suite, touchent également la troisième parabole π_c ; nous les désignons par Δ et Δ'.

Adoptons les coordonnées barycentriques x, y, z. Les droites AA′, BB′, CC′ auront pour équations

$$\frac{y}{z} = \frac{CA'}{A'B} = \frac{\gamma + t(*)}{\beta - t}, \quad \frac{z}{x} = \frac{\alpha + t}{\gamma - t}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\beta + t}{\alpha - t}, \tag{1}$$

α, β, γ, t désignant les quantités cot A, cot B, cot C, cot θ.

Des relations (1) on conclut la condition pour que les points A′, B′, C′ soient en ligne droite :

$$(\alpha + t)(\beta + t)(\gamma + t) = -(\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t) \tag{2}$$

$$t^2 = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}. \tag{3}$$

On en déduit également l'équation de la droite B′C′ :

$$-(\alpha^2 - t^2)x + (\alpha + t)(\beta + t)y + (\alpha - t)(\gamma - t)z = 0 \tag{4}$$

ou

$$(x + y + z)t^2 + [(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z]t + \alpha(\beta y + \gamma z - \alpha z) = 0,$$

puis celle de l'enveloppe de B′C′ lorsque t varie :

$$[(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z]^2 - 4(x + y + z)(\beta y + \gamma z - \alpha z) = 0.$$

La forme de cette équation montre immédiatement que l'enveloppe est une parabole, car la droite de l'infini (équation : $x + y + z = 0$) est une tangente. On voit aussi qu'un diamètre est la symédiane AK (équation : $(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z = 0$).

(*) On suppose $\theta = AA'C$, et on calcule CA′ en observant que

$$CA' = CD + DA' = AD(\cot C + \cot AA'D), \text{ etc.}$$

Digitized by Google

L'équation de la droite B″C″ s'obtient en changeant θ en $\pi - \theta$ ou t en $-t$; elle est donc

$$-(\alpha^2 - t^2)\,x + (\alpha - t)(\beta - t)\,y + (\alpha + t)(\gamma + t)\,z = 0. \quad (5)$$

Si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (4) et (5) on trouve l'équation de la symédiane AK. Par conséquent, les *côtés homologues des deux triangles* A′B′C′ *et* A″B″C″ *se coupent sur les symédianes de* ABC. En particulier, *les droites* Δ *et* Δ' *se coupent à la fois sur les trois symédianes ou passent par le point de Lemoine* K.

Multipliant membre à membre les équations (4) et (5), on obtient

$$(\alpha^2 - t^2)^2 x^2 + (\alpha^2 - t^2)(\beta^2 - t^2)\,y^2 + (\alpha^2 - t^2)(\gamma^2 - t^2)\,z^2$$
$$- 2(\alpha^2 - t^2)(\alpha\beta + t^2)\,xy - 2(\alpha^2 - t^2)(\alpha\gamma + t^2)\,xz$$
$$+ zy\,[(\alpha + t)^2(\beta + t)(\gamma + t) + (\alpha - t)^2(\beta - t)(\gamma - t)] = 0.$$

S'il s'agit des droites Δ et Δ', on peut remplacer, dans le coefficient de zy, les produits $(\alpha + t)(\beta + t)(\gamma + t)$, $(\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t)$ l'un par l'autre changé de signe ; ce coefficient prend alors la forme

$$-(\alpha^2 - t^2)(\beta - t)(\gamma - t) - (\alpha^2 - t^2)(\beta + t)(\gamma + t),$$

et l'équation précédente devient après division par le facteur $\alpha^2 - t^2$:

$$\Sigma(\alpha^2 - t^2)\,x^2 - 2\Sigma(\alpha\beta + t^2)\,xy = 0,$$

ou

$$(\Sigma\alpha^2 x^2 - 2\Sigma\alpha\beta xy) - t^2(x + y + z)^2 = 0.$$

On en conclut que les transversales Δ et Δ' sont les asymptotes de la conique représentée par l'équation

$$\Sigma\alpha^2 x^2 - 2\Sigma\alpha\beta xy = 0,$$

courbe qui touche les côtés de ABC aux pieds des hauteurs et qui a pour centre le point de Lemoine. On pourrait aussi déduire cette propriété de ce que les segments des tangentes BC, CA, AB compris entre Δ et Δ' ont leurs milieux aux points de contact D, E, F.

Note. M. Gob, à qui nous avons donné connaissance de nos recherches, nous communique cette proposition très curieuse :

Les droites Δ, Δ' *sont perpendiculaires aux tangentes menées de H à l'ellipse minimum circonscrite au triangle ABC.*

En effet, cette ellipse et la conique qui touche les côtés de ABC aux pieds des hauteurs sont polaires réciproques par rapport au cercle conjugué H.

Digitized by Google

×DES PROGRESSIONS LOGARITHMIQUES;

par . E. Barbette.

Définition. Une *progression logarithmique* est une suite de nombres dont chacun égale le précédent élevé à une puissance constante, appelée *raison*.

Par exemple, si l'on élève le nombre a à la puissance r, on forme le nouveau nombre a^r; si l'on élève celui-ci à la puissance r, on obtient le nombre $(a^r)^r$ ou a^{r^2}; si l'on élève ce dernier à la puissance r, on a le nombre $(a^{r^2})^r$ ou a^{r^3}; et ainsi l'on forme la suite

$$\div\div\div a \vdots a^r \vdots a^{r^2} \vdots a^{r^3} \vdots \cdots,$$

dans laquelle le signe $\div\div\div$ qui précède a et les trois points $\vdots$ qui séparent les différents termes indiquent que l'on a affaire à une progression logarithmique.

Remarques. 1° La raison $r = \log_a a^r$, d'où le nom de progression logarithmique. 2° Nous donnerons au premier terme a de toute progression logarithmique le nom de *base* de cette progression et nous remarquerons en outre que les progressions ainsi formées n'ont de sens que si a et r sont des nombres positifs.

Théorème I. Le $n^{ième}$ terme d'une progression logarithmique égale le premier élevé à une puissance marquée par la puissance $(n-1)^{ième}$ de la raison.

La démonstration de ce théorème a été donnée ci-dessus.

Corollaire I. Le théorème précédent permet d'insérer entre deux nombres donnés α et β un certain nombre m de *moyens logarithmiques*, c'est-à-dire, d'écrire une progression logarithmique de $m+2$ termes dont α et β soient les extrêmes.

La raison r est l'inconnue principale; or on peut écrire $\beta = \alpha^{r^{m+1}}$; d'où

$$\log_\alpha \beta = r^{m+1}, \quad r = \sqrt[m+1]{\log_\alpha \beta}.$$

Corollaire II. Si entre les termes consécutifs d'une progression logarithmique

$$\div\div\div a \vdots b \vdots c \vdots \cdots\cdots \vdots k \vdots l,$$

on insère un même nombre m de moyens logarithmiques, on obtient

Digitized by Google

une suite de progressions partielles qui forment une seule et même progression.

En effet, d'après le corollaire I, les raisons des progressions partielles sont

$$\sqrt[m+1]{\log_a b}, \quad \sqrt[m+1]{\log_b c}, \quad \ldots, \quad \sqrt[m+1]{\log_k l}.$$

Or par hypothèse,

$$\log_a b = \log_b c = \ldots = \log_k l ;$$

donc les raisons des progressions partielles étant égales, ces progressions n'en forment qu'une, attendu que le dernier terme de l'une d'elles est précisément le premier terme de la suivante.

Problème. Rechercher la condition pour que trois nombres α, β, γ fassent partie d'une même progression logarithmique.

Solution. Soient $\alpha < \beta < \gamma$ et supposons que ces trois nombres puissent faire partie d'une même progression logarithmique.

Désignons par $m - 1$ le nombre de moyens existant entre α et β, la raison de la première progression partielle sera $\sqrt[m]{\log_\alpha \beta}$; soit $n - 1$ le nombre de moyens existant entre β et γ, la raison de la seconde progression partielle sera $\sqrt[n]{\log_\beta \gamma}$.

Pour qu'il n'y ait qu'une *seule* progression, il suffit que

$$\sqrt[m]{\log_\alpha \beta} = \sqrt[n]{\log_\beta \gamma}.$$

D'où en élevant à la puissance mn :

$$(\log_\alpha \beta)^n = (\log_\beta \gamma)^m,$$

telle est la condition demandée.

Remarque. Cette condition peut aussi s'écrire dans n'importe quelle base

$$\left(\frac{\log \beta}{\log \alpha}\right)^n = \left(\frac{\log \gamma}{\log \beta}\right)^m$$

ou

$$(\log \beta)^{n+m} = (\log \gamma)^m + (\log \alpha)^n .$$

Théorème II. Le produit des termes d'une progression logarithmique de n nombres égale la base de cette progression, élevée à un exposant donné par une fraction dont le numérateur est l'excès de la puissance

Digitized by Google

$n^{ième}$ de la raison sur l'unité et le dénominateur l'excès de la raison sur l'unité.

Démonstration. En effet, ce produit

$$P_n = a \times a^r \times a^{r^2} \times a^{r^3} \times \cdots \times a^{r^{n-1}}$$

$$= a^{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}} = a^{\frac{r^n-1}{r-1}}.$$

COROLLAIRE. Si la raison est moindre que l'unité, on écrira

$$P_n = a^{\frac{1-r^n}{1-r}}$$

et si n croît indéfiniment, on aura

$$\text{limite } P_n = a^{\frac{1}{1-r}}.$$

REMARQUES. 1° On peut aussi trouver la somme

$$S_n = a + a^r + a^{r^2} + a^{r^3} + \cdots + a^{r^{n-1}}$$

à l'aide de la formule de récurrence

$$S_n = (S_{n-1} - S_{n-2})^r + S_{n-1}$$

en remarquant que

$$S_0 = 1 \text{ et } S_1 = a.$$

2° La puissance des termes d'une progression logarithmique

$$\vdots\vdots\vdots\ a \vdots b \vdots c \vdots \cdots\cdots \vdots k \vdots l$$

est donnée par

$$E_n = \left[\left\{\left((a^b)^c\right)^{\cdots}\right\}^k\right]^l$$

$$= a^{bc\ldots kl},$$

$$= a^{a^r \cdot a^{r^2} \cdots a^{r^{n-1}}},$$

$$= a^{a^{\frac{r^n-r}{r-1}}}.$$

Si la raison est moindre que l'unité, on écrira

$$E_n = a^{a^{\frac{r-r^n}{1-r}}},$$

et si n croît indéfiniment, on aura

$$\text{limite } E_n = a^{a^{\frac{r}{1-r}}}.$$

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Théorèmes*, par M. A. Cazamian. I. On considère sur une cubique un groupe de quatre points A, B, C, D, tels que les tangentes en ces quatre points se coupent sur la cubique. Appelons-le groupe homotangentiel.

1° Démontrer que la droite joignant deux quelconques de ces points et la droite joignant les deux autres se rencontrent sur la cubique. On obtient ainsi trois nouveaux points de la courbe. Démontrer qu'ils forment avec le tangentiel commun des points A, B, C, D un groupe homotangentiel.

2° On considère deux groupes homotangentiels. On joint un point quelconque du premier à un point quelconque du second et un autre point du premier groupe à un autre point du second. Prouver que ces deux droites se coupent sur la cubique. Soit α ce point. Si l'on fait cette opération de toutes les manières possibles, on obtient 36 points tels que α. Montrer que quatre seulement d'entre eux sont distincts et qu'ils forment un groupe homotangentiel.

3° Soit M le tangentiel commun d'un groupe homotangentiel. Les points de contact des tangentes menées par le point M à une conique quelconque passant par les quatre points du groupe sont sur la cubique.

Application : Construire avec la règle et le compas une cubique, connaissant un groupe homotangentiel et leur tangentiel commun.

4° Si l'on considère tous les groupes homotangentiels d'une cubique, chacun d'eux se partage en couples de points tels que les droites joignant un point fixe quelconque de la cubique à tous ces couples de points forment une involution.

II. Désignant sous le nom de courbes cycliques les courbes qu'un cercle ne rencontre qu'en quatre points à distance finie, démontrer les deux propositions suivantes :

1° Ces courbes sont des coniques, des cubiques circulaires, ou des quartiques bicirculaires.

2° Les cercles osculateurs à une courbe cyclique en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la courbe en quatre points situés sur un cercle.

Digitized by Google

III. On considère une cubique circulaire *quelconque*. Démontrer que les cercles osculateurs en trois points en ligne droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points tels que le cercle défini par ces trois points passe par un point fixe situé sur la courbe. C'est le point où la cubique est rencontrée par son asymptote réelle.

12. *Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements, par le* R. P. Bosmans. Si $X^2 + Y^2 - R^2 = 0$ est l'équation de la circonférence fixe sur laquelle roule la circonférence mobile, qui engendre l'hypocycloïde à quatre rebroussements, ayant pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} = 0,$$

on peut aussi représenter celle-ci par les deux relations

$$x = \frac{X^3}{R^2}, \quad y = \frac{Y^3}{R^2}.$$

Elles ne diffèrent pas des formules classiques

$$x = R\cos^3\tfrac{1}{4}\varphi, \quad y = R\sin^3\tfrac{1}{4}\varphi,$$

mais elles mettent bien en évidence un procédé élémentaire, pour construire directement les coordonnées d'un point de l'hypocycloïde à quatre rebroussements, au moyen de celles d'un point pris sur la circonférence fixe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1119.

(Voir *Mathesis*, (2) T. VII, p. 125).

On donne une ellipse E, *de centre* O *et de foyers* F *et* F'. *D'un point quelconque* M *du plan on mène à* E *les tangentes.*

Par les points de contact P, Q *et par* M *on fait passer une circonférence qui rencontre l'ellipse en deux nouveaux points* P', Q'. *Soit* M' *le pôle de la corde* P' Q' *par rapport à* E.

1° M, M', F, F' *sont quatre points concycliques.*

2° MM' *est une symédiane du triangle* FMF'.

3° *Si* M *se meut sur une circonférence de centre* O, M' *se meut sur une seconde circonférence de centre* O *et la droite* MM' *enveloppe une développée de conique.*

Digitized by Google

4° *Si* M *décrit une lemniscate de centre* O *et de mêmes axes que* E, M' *décrit une hyperbole équilatère.*

5° *Si* M *décrit une strophoïde droite ayant* O *pour point double et* OF *pour axe,* M' *décrira une hyperbole équilatère.*

6° *Si* M *décrit une cissoïde ayant pour axe* OF *et* O *pour point de rebroussement,* M' *décrira une parabole.*

7° *Si* M *décrit un limaçon de Pascal* (*cardioïde*) *dont l'axe est dirigé suivant* OF *et dont le pôle est en* O, M' *décrira une conique* (*parabole*).

8° *Si* M *décrit la podaire de* O *par rapport à une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant pour axes ceux de l'ellipse,* M' *decrira une kreuzcurve.*

9° *Si* M *décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de* E, M' *décrira une podaire d'ellipse.* (Déprez.)

Solution par V. Vetali (Milan). 1° Que les points M, M', F, F' sont sur un cercle, est un théorème connu(*); on peut ajouter que M, M' et les deux foyers imaginaires de E sont sur un deuxième cercle orthogonal au premier.

2° Si (α, β) sont les coordonnées de M et $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, l'équation de E, les équations des cercles MPQ, MFF', et de leur axe radical MM' sont (*Mathesis*, 1894, p. 274) :

$$(1)\qquad (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)(x^2 + y^2) - b^2\alpha x(\alpha^2 + \beta^2 + c^2) - a^2\beta y(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) + c^2(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0,$$

$$(2)\qquad \beta(x^2 + y^2) - y(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) - c^2\beta = 0,$$

$$(3)\qquad -\beta(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)x + \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)y + 2c^2\alpha\beta = 0.$$

L'équation (3) étant vérifiée par les coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{2c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - c^2}$$

du pôle de la droite FF' par rapport à (2), *le point* M' *est conjugué harmonique de* M *par rapport aux points* F, F' *sur le cercle* MFF', et les angles FMM', OMF' sont égaux.

Si M_1 est le point symétrique de M' par rapport à l'axe FF', les points M et M_1 sont réciproques par rapport au cercle O^2, décrit sur le diamètre

---

(*) Voir p. ex. Neppi, *Questioni di G. Anal.*, pag. 192.

Digitized by Google

FF'. *Les points* M *et* M' *sont donc correspondants dans une transformation quadratique involutoire, qui est le produit d'une symétrie par rapport à l'axe* FF' *et d'une inversion par rapport au cercle* O^2. Les formules de la transformation sont

$$x = c^2x' : (x'^2 + y'^2), \quad y = -c^2y' : (x'^2 + y'^2).$$

La correspondance entre les points M et M' étant réduite à une inversion, toutes les propositions de l'énoncé, et d'autres plus générales deviennent évidentes soit par l'analyse, soit par la géométrie pure.

3° En posant $MOF = \theta$, $OM = r$, l'équation de MM' est

$$x(r^2 + c^2)\sin\theta - y(r^2 - c^2)\cos\theta - rc^2\sin 2\theta = 0;$$

son enveloppe, si r est constant, est (voir Salmon, *Courbes Planes*, p. 100 de l'éd. franc.),

$$[(r^2 + c^2)^2x^2 + (r^2 - c^2)^2y^2 - 4c^4r^2]^3 = 27.4c^4r^2(r^4 - c^4)^2.x^2y^2.$$

4° Si M décrit une lemniscate de centre O, dont les axes ont une *direction arbitraire*, M' décrit l'hyperbole équilatère qui est l'inverse par rapport à O^2 de la lemniscate symétrique à la lemniscate donnée, par rapport à l'axe FF'.

5° Si M décrit une cubique circulaire ayant un point double en O, M' décrit une conique passant par O ; etc.

6° Si la cubique circulaire, décrite par M, a en ce point O un rebroussement, le lieu de M' est la parabole ; etc.

7° Si M décrit un limaçon (cardioïde), *dont l'axe a une direction quelconque*, et le point double réel en O, M' décrit une conique (parabole) ayant un (le) foyer en O ; cette courbe est l'inverse, par rapport à O^2, du limaçon symétrique ; etc.

8° Si M décrit la podaire de O par rapport à *une courbe quelconque* C, M' décrit la courbe polaire réciproque (par rapport à O^2) de la courbe C' symétrique de C par rapport à l'axe FF'. En particulier, si C est la développée d'une conique centrale, le lieu de M' est une kreuzcurve (Voir ma définition de la kreuzcurve, *Mathesis*, 1894, p. 50).

9° Si M décrit *une courbe quelconque* C, M' décrit l'inverse, par rapport à O^2, de la courbe C' symétrique de C par rapport à FF' ; c'est-à-dire la podaire, par rapport à O, de la polaire réciproque de C', par rapport à O^2.

Solution par M. Droz Farny. Soient x_0, y_0 et x_1, y_1, les coordonnées

Digitized by Google

des points M, M′; on voit facilement que les six sommets des deux triangles semi-conjugués MPQ et M′P′Q′ appartiennent à une conique ayant pour équation

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)$$
$$-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-1\right)=0.$$

Cette conique sera un cercle si

$$x_0x_1-y_0y_1=c^2,\quad x_0y_1+y_0x_1=0;$$

d'où

$$x_1=\frac{c^2x_0}{x_0^2+y_0^2},\quad y_1=-\frac{c^2y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

Il résulte d'abord de ces formules que les droites OM et OM′ sont symétriquement disposées par rapport au grand axe de E.

On a

$$x_1^2+y_1^2=\frac{c^4}{x_0^2+y_0^2},$$

et, par conséquent,

$$OM.OM'=c^2.$$

Représentons par M_2 et M_2' les symétriques de M′ respectivement par rapport au grand axe et au petit axe de E. Comme $OM'=OM_2=OM_2'$ on a d'abord :

$$OM.OM_2'=c^2=OF.OF'.$$

1° Les quatre points M, M_2', F et F′ sont sur une même circonférence ; M′ étant symétrique de M_2' par rapport à un diamètre de cette circonférence, appartient aussi à cette courbe.

Comme $M_2'M'$ est parallèle à FF′, les droites MM_2' et MM′ sont isogonales dans l'angle FMF′ et comme MM_2' est médiane du triangle FMF′, MM′ en est la symédiane.

On peut remarquer que le quadrilatère MFM′F′ est harmonique.

3° Comme $OM.OM_2'=c^2$, les lieux décrits par les points M et M_2' sont inverses l'un de l'autre, l'origine étant en O; de là le théorème :

Lorsque le point M *décrit une courbe quelconque,* M′ *décrit la symétrique de son inverse par rapport au grand axe de l'ellipse,* O *étant le pôle et* c^2 *le module d'inversion.*

Digitized by Google

Les propriétés 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont une conséquence immédiate de ce théorème, les deux courbes citées dans chacun de ces articles étant inverses l'une de l'autre.

D'après les propriétés bien connues des cercles de Chasles, en supposant OM > OM', si dans le 3° on pose OM $= \alpha + \beta$ et OM' $= \alpha - \beta$, le milieu μ de MM' décrit une ellipse dont les axes ont même direction que ceux de E et ayant respectivement 2α et 2β comme longueurs et MM' est normale en μ à cette ellipse.

Solution analogue par M. Barisien. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire en entier; qu'il nous suffise d'en extraire les remarques suivantes :

1° *Si le point* M *décrit une des diagonales du rectangle des axes de* E, *le cercle* MPQ *passe par* O; 2° *Si* M *décrit le cercle de diamètre* FF', M' *parcourt le même cercle;* 3° *Si* M *se meut sur une droite passant par* O, *les droites* PQ et P'Q' *se coupent sur une hyperbole fixe;* 4° *Si* S *est le point de Lemoine du triangle* MFF', *on a*

$$\text{tg SOF} = \tfrac{1}{2}\,\text{tg MOF}.$$

Question 1122.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 127).

Étant donnés dans un plan un pôle fixe o et un point-cercle a, faisons correspondre à un point variable p son conjugué p' par rapport au point-cercle, aligné avec o : si p décrit une droite h, le lieu de p' est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que h coupe le cercle décrit sur le diamètre oa en deux points réels et distincts, coïncidants, ou imaginaires conjugués. (V. Retali.)

Solution par M. A. Droz-Farny. La polaire de p par rapport au cercle-point a, est la perpendiculaire ap' élevée en a sur ap. La droite op, d'après les conventions admises, coupera ap' au conjugué p' de p. Pour des positions variables de p, les couples de droites ap et ap' étant en involution, les deux faisceaux ap et ap' sont homographiques; les deux faisceaux op et ap étant perspectifs lorsque p décrit une droite h, il en résulte que les faisceaux ap' et op' sont homographiques. Le lieu des points p' est donc une conique passant par les points o et a.

La perpendiculaire élevée en a sur oa coupe h en π; les deux droites πa et πo sont les tangentes à la conique en a et o.

Le point p' se transporte à l'infini lorsque op' est parallèle à ap'; par

Digitized by Google

conséquent ap est perpendiculaire sur op', et p appartient à la circonférence décrite sur oa comme diamètre.

Le lieu est donc bien une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que k coupe le cercle décrit sur le diamètre oa en deux points réels et distincts, coïncidants ou imaginaires conjugués.

Remarque. Le cercle-point a pouvant être considéré comme l'ensemble des droites isotropes passant par a, les points p et p' appartiennent à une correspondance birationnelle quadratique de deuxième espèce ; cas particulier de la transformation de Hirst (voir Cl. Servais, *Mathesis*, 1897, page 190(*).

Solution analogue par M. Buysens.

×Question 1125.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 150).

Si $xyz = abc = 1$, *le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{xy(z-c)}{z+c} & -y & 1 \\ 1 & \dfrac{yz(x+a)}{x+a} & -z \\ -x & 1 & \dfrac{zx(y-b)}{y+b} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A. C.).}$$

Solution par M. J. Degueldre. Ajoutons à la première colonne, la seconde multipliée par x; à la seconde, la troisième multipliée par y; à la troisième, la première multipliée par z. Le déterminant sera multiplié par $1 + xyz$ et devient

$$\frac{8}{(x+a)(y+b)(z+c)} \begin{vmatrix} -cxy & 0 & z \\ x & -ayz & 0 \\ 0 & y & -bxz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8(-abcx^2y^2z^2 + xyz)}{(x+a)(y+b)(z+c)} = 0.$$

(*) La transformation dont il s'agit dans la question 1122, a été étudiée par MM. de Longchamps et d'Ocagne (Voir *Journal de Bourget*, 1882, p. 49; 1885, p. 15).

Digitized by Google

Note. Si l'on représente le déterminant proposé par $| \alpha \beta \gamma |$, le nouveau déterminant est

$$| \alpha + \beta x \quad \beta + \gamma y \quad \gamma + \alpha z |;$$

on peut le décomposer en huit déterminants, dont six sont nuls et dont les deux autres sont :

$$| \alpha \beta \gamma | + xyz | \beta \gamma \alpha |.$$

Solution par J. F. d'Avillez. Si l'on multiplie la première colonne par z, la seconde par x et la troisième par y, le déterminant, que nous représenterons par Δ, sera multiplié par $xyz = 1$, on aura donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{z-c}{z+c} & -yx & y \\ z & \dfrac{x-a}{x+a} & -zy \\ -xz & x & \dfrac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}.$$

En développant on trouve

$$\Delta = \frac{(z-c)(x-a)(y-b)}{(z+c)(x+a)(y+b)} + \frac{x-a}{x+a} + \frac{y-b}{y+b} + \frac{z-c}{z+c}$$

ou

$$\Delta.(z+c)(x+a)(y+b)$$
$$= (z-c)(x-a)(y-b) + (x-a)(z+c)(y+b)$$
$$+ (y-b)(z+c)(x+a) + (z-c)(x+a)(y+b).$$

On vérifie aisément que le second membre est nul, donc aussi

$$\Delta = 0.$$

Solution par M. Déprez. Le développement du déterminant est

$$\frac{x^2y^2z^2(x-a)(y-b)(z-c)}{(x+a)(y+b)(z+c)} + \Sigma \frac{xyz(x-a)}{x+a} + 1 - xyz;$$

en tenant compte de l'hypothèse $xyz = 1$, on voit que la question revient à vérifier l'égalité

$$(x-a)(y-b)(z-c) + \Sigma(x-a)(y+b)(z+c) = 0,$$

sous la condition $xyz = abc = 1$; etc.

Digitized by Google

Question 1137.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 214).

On donne une ellipse de centre O ; *soient* F *l'un des foyers,* D *le pied de la directrice correspondante,* M *un point de la circonférence décrite sur* OD *comme diamètre,* B *et* C *les points de rencontre de l'ellipse avec la perpendiculaire élevée en* M *sur* FM. 1° *On a la relation*

$$\frac{1}{BF}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{a}.$$

2° *Le pôle de* BC *par rapport à l'ellipse décrit une parabole passan par les extrémités du petit axe de l'ellipse et ayant pour sommet le point* F.

(Déprez).

Solution par MM. A. Droz-Farny et Barisien. I. Soit R le milieu de OD; on a d'abord

$$OD=\frac{a^2}{c},\ OF=c,\ RF=c-\frac{a^2}{2c}=\frac{2c^2-a^2}{2c},\ FD=OD-OF=\frac{b^2}{c}.$$

L'équation polaire de l'ellipse pour F comme pôle et FO comme axe est

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Soit FM = d une droite inclinée d'un angle α sur l'axe polaire; la perpendiculaire BC sur FM en M aura pour équation :

$$d=\rho\cos(\varphi-\alpha). \qquad (2)$$

En éliminant φ entre ces équations (1) et (2), on obtient une équation du 2^{me} degré en ρ dont les racines sont les longueurs FB et FC.

On déduit de (1)

$$\cos\varphi=\frac{\rho a-b^2}{\rho c},\quad \sin^2\varphi=\left[1-\frac{(\rho a-b^2)^2}{\rho^2c^2}\right].$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) écrite sous la forme

$$(d-\rho\cos\varphi\cos\alpha)^2=\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha,$$

elle deviendra, après quelques transformations,

$$\rho^2(a^2-c^2\sin^2\alpha)-2\rho[ab^2+adc\cos\alpha]+c^2d^2+b^4+2dcb^2\cos\alpha=0. \qquad (3)$$

Or, l'équation polaire du cercle de diamètre OD étant

$$\frac{a^4}{4c^2}=\frac{(2c^2-a^2)^2}{4c^2}+d^2-\frac{d(2c^2-a^2)}{c}\cos\alpha,$$

Digitized by Google

on en déduit

$$cd\cos\alpha = \frac{c^2(b^2 - d^2)}{a^2 - 2c^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (3) on trouve :

$$\rho^2(a^2 - c^2\sin^2\alpha) - 2\rho\frac{a(b^4 - d^2c^2)}{a^2 - 2c^2} + \frac{a^2(b^4 - d^2c^2)}{a^2 - 2c^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{BF} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{a}.$$

II. L'enveloppe de BC est l'ellipse décrite sur OD comme grand axe et dont un des foyers est en F. Comme cette ellipse passe par O, sa polaire réciproque par rapport à l'ellipse primitive est une parabole dont le sommet est en F puisque F est le pôle de la tangente en D, directrice de l'ellipse primitive.

Le petit axe de l'ellipse OD ayant pour valeur

$$\sqrt{\frac{a^4}{4c^2} - \frac{(2c^2 - a^2)^2}{4c^2}} = b$$

il est dès lors évident que les tangentes aux extrémités du petit axe ont pour pôles respectifs les extrémités du petit axe de l'ellipse primitive, d'où le théorème.

Question 1152.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 31).

Démontrer que l'équation

$$f(x) = 12x^5 - 7x^4 + x^2 - 3000 = 0$$

n'admet qu'une seule racine réelle positive. Trouver cette racine avec 6 *décimales exactes.* (H. Brocard).

Solution par M. Smout. Si on écrit l'équation

$$(x - 1)(12x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6) - 2994 = 0$$

on voit : 1° que, pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et 1, le premier membre est négatif; 2° que, pour les valeurs de x supérieures à 1, le premier membre croît, sans interruption, de -2994 à $+\infty$. Il ne peut donc s'annuler qu'une seule fois.

Digitized by Google

Il n'y a donc qu'une seule racine réelle positive. On trouve, pour cette dernière, la valeur 3,141544, avec six décimales exactes.

Autres solutions par MM. LISTRAY et DEMANET.

NOTE. L'auteur de la question nous fait savoir qu'il a été amené à la proposer parce que l'unique racine réelle positive de l'équation considérée représente une valeur approchée de π.

×Question 1163.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VIII, p. 79).

On considère deux cercles tangents en O *et dont les extrémités des diamètres passant par* O *sont* A *et* B. *Une sécante mobile passant par* O *rencontre le cercle* OA *en* A′ *et le cercle* OB *en* B′. *Le lieu du point de rencontre des droites* AB′ *et* BA′ *est un cercle.* (E. N. BARISIEN.)

Solution par MM. G. GÉRARD, GOUX, FRANÇOIS, ROMIEU, COLART et DROZ FARNY. Soient M le point d'intersection de AB′ avec BA′, D et D′ les points de rencontre de OM avec AA′ et BB′, C et C′ les centres des cercles OA, OB. M est le conjugué harmonique de O par rapport au segment DD′ ; par suite, si nous menons MS, MN parallèles à DC, DA jusqu'à la rencontre de OAB en S, N, ces points seront déterminés. Or, on sait que OM passe par le milieu de AA′, BB′ ; donc les angles CDA, C′D′B, et, par suite, SMN sont droits ; donc le lieu de M est le cercle décrit sur SN comme diamètre.

REMARQUE. On peut généraliser la question précédente, en considérant deux cercles quelconques et menant les sécantes par l'un des centres de similitude. Le lieu complet se compose de quatre cercles. Même démonstration que plus haut.

Enfin, on peut énoncer une proposition tout à fait générale : Étant données deux courbes homothétiques d'ordre quelconque, si l'on joint en croix deux points homologues fixes quelconques à deux points homologues pris sur les courbes, le lieu du point d'intersection des droites ainsi obtenues est une courbe semblable aux proposées (GÉRARD).

Solution par M. RIPERT. Les équations des cercles OA et OB étant :

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0; \quad x^2 + y^2 - 2bx = 0 \qquad (C')$$

on trouve aisément pour l'équation du lieu demandé :

$$(a+b)^2(x^2+y^2) - 4ab(a+b)x + 3a^2b^2 = 0. \qquad (C'')$$

Digitized by Google

Le centre de C'' est le conjugué harmonique de O par rapport aux centres de C et C' et son rayon est la moyenne harmonique des rayons *a* et *b*.

Remarque. Le théorème de M. Barisien est un cas particulier du suivant :

Soient deux coniques C *et* C' *tangentes en* O *et se coupant aux deux points (réels ou imaginaires)* M *et* N. *Soient* K *et* K' *les pôles (situés avec* O *sur une droite d) de la droite* MN *par rapport à* C *et* C', *et* A, B *les secondes extrémités des cordes* OK, OK'. *Une sécante mobile passant par* O *rencontre respectivement* C *et* C' *en* A' *et* B'. *Le lieu du point de rencontre des droites* AB' *et* BA' *est une conique* C'', *passant par* M *et* N, *le pôle* K'' *de* MN *étant le conjugué harmonique de* O *par rapport à* K *et* K' *et le conjugué harmonique du point d'intersection de d et de* MN *par rapport aux points* E, E' *communs à d et à* C'', *la corde* EE' *étant le double de la moyenne harmonique de* OK *et* OK'.

Le théorème corrélatif est : *Soient deux coniques* C *et* C' *tangentes au même point à une droite* O *et ayant pour tangentes communes les droites m et n. Soient k et k' les polaires (concourant avec* O *en un point* D) *du point mn par rapport à* C *et* C', *et a, b les secondes tangentes passant par les points ok, ok'. D'un point mobile sur* O, *on mène à* C *et* C' *les secondes tangentes a', b'. L'enveloppe des droites de jonction des points ab' et ba' est une conique* C'', *tangente à m et n, la polaire k'' de mn étant la conjuguée harmonique de* O *par rapport à k et k' et la conjuguée harmonique de la droite de jonction de* D *et de mn par rapport aux tangentes e, e' menées de* D *à* C'', *l'angle* (*e*, *e'*) *étant la somme de deux angles moyens harmoniques* (*o*, *k*) *et* (*o*, *k'*).

Deux paraboles dont les diamètres sont parallèles étant des coniques tangentes au même point O de la droite *o* de l'infini, on peut trouver des cas particuliers intéressants.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques (7 juin 1898).

On considère une sphère (S) de rayon R, qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires, *Oxyz* ; et un paraboloïde (P) qui a pour plan directeur *xOy*, et pour directrices : 1° l'axe *Oz* ;

Digitized by Google

2° la droite AB définie par les points A et B dont les coordonnées x, y, z, sont respectivement (R, 0, R) et (a, b, c).

I. Former les équations de la sphère et du paraboloïde.

II. On prend un point M sur Oz, et les plans polaires $[\Sigma]$ et $[\Pi]$ de ce point par rapport aux surfaces (S) et (P). Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans, quand M décrit Oz; déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde (P).

III. En supposant AB à 45° sur Oz, et tangente à la sphère (S) au point B, dans le trièdre $Oxyz$, calculer les coordonnées (a, b, c) du point B en fonction de R; déterminer les génératrices du paraboloïde (P) qui sont tangentes à la sphère (S); calculer le nombre de centièmes de la cote c du point B, quand R est égal à 1.

On conservera les notations indiquées.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

839. Résoudre le système

$$x^4 + y^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = a, \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = b.$$

On prend pour inconnues auxiliaires

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = u, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = v;$$

ce qui donne le système

$$u^2 + v^2 = a - 4, \quad u + v = b, \text{ etc,}$$

840. Si un polynôme symétrique en x et y est divisible par $x - y$, il est divisible par $(x - y)^2$.

Soit le polynôme $F(x, y) = (x - y) f(x, y)$; on a $F(y, x) = (y - x) f(y, x)$. Par hypothèse $F(x, y) = F(y, x)$; on en conclut $f(x, y) = -f(y, x)$, d'où $f(x, x) = -f(x, x)$, et par suite $f(x, x) = 0$, de sorte que $f(x, y)$ est divisible par $x - y$, etc.

Plus généralement, si le polynôme symétrique $F(x, y)$ est divisible par $(x - y)^{2n-1}$, il est aussi divisible par $(x - y)^{2n}$.

841. Vérifier que les expressions

$$(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2$$
$$(n+3)^3 - 3(n+2)^3 + 3(n+1)^3 - n^3$$
$$(n+4)^4 - 4(n+3)^4 + 6(n+2)^4 - 4(n+1)^4 + n^4$$
$$(n+5)^5 - 5(n+4)^5 + 10(n+3)^5 - 10(n+2)^5 + 5(n+1)^5 - n^5$$
$$(n+6)^6 - 6(n+5)^6 + 15(n+4)^6 - 15(n+3)^6 + 15(n+2)^6 - 6(n+1)^6 + n^6$$

Digitized by Google

sont constantes, quel que soit n, et ont respectivement pour valeurs 2, 6, 24, 120, 720. (E. N. Barisien.)

La question générale est traitée dans la *Théorie des différences*. (Voir, par exemple, Sturm, *Cours d'Analyse*).

842. On a dans un triangle rectiligne ABC

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}(\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C)+\frac{1}{b}(\operatorname{cotg} C+\operatorname{cotg} A)+\frac{1}{c}(\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B);$$

$$S=\frac{\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C}{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h'^2}+\frac{1}{h''^2}}.$$

(Degueldre).

843. Résoudre et discuter les systèmes

$$\begin{cases}\sin x=a\sin y,\\ \cos x=b\cos y.\end{cases}\qquad\begin{cases}\sin x=a\operatorname{tg} y,\\ \sin y=b\operatorname{tg} x.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\operatorname{tg} x+b\operatorname{tg} y=c,\\ a'\cot x+b'\cot y=c'.\end{cases}\qquad\begin{cases}a\cos x+b\cos y=c,\\ \sin x=m\sin y.\end{cases}$$

844. Trouver, pour $x=y$, les vraies valeurs des expressions

$$\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin(x-y)},\quad \frac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\sin\frac{1}{2}(x-y)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}(x-y)},\quad \frac{\sin^3 x-\sin^3 y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}.$$

845. Maximum ou minimum des expressions

$$\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2},\quad \frac{x^2-ax}{x-b},\quad \frac{x^2-a^2}{ax-1}.$$

846. Si A′, B′, C′ sont les pieds des hauteurs AA′, BB′, CC′ d'un triangle ABC, on a la relation

$$AB.AC'+BC.BA'+CA.CB'=AB.BC'+BC.CA'+CA.AB'$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

847. On porte sur le petit axe d'une ellipse, à partir du centre, des longueurs OM, OM′ égales aux distances FP, F′P′ des foyers à une même tangente. Démontrer que les droites AM, A′M′ joignant les points aux extrémités A, A′ du grand axe se coupent sur l'ellipse.

(Petit-Bois).

Cette proposition résulte immédiatement des suivantes : 1° le produit $FP.F'P'=b^2$; 2° deux cordes supplémentaires issues de A et A′ déterminent sur le petit axe des couples de points en involution.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1173. On donne dans un même plan trois systèmes égaux F_1, F_2, F_3; A_3 est le point double de F_1, F_2; A_1 celui de F_2, F_3; A_2 celui de F_3, F_1; D_1, D_2, D_3 sont respectivement les points correspondants à A_1, A_2, A_3 dans les systèmes F_1, F_2, F_3. Si, pour chaque triple P_1, P_2, P_3 de points homologues, on détermine le centre P du cercle circonscrit, on obtient un quatrième système que nous appellerons Φ : cela posé, démontrer que chacun des systèmes F_1, F_2, F_3 est lié à Φ par une correspondance quadratique rationnelle (*Steiner'sche Verwandtschaft*) et étudier ces trois transformations. (RETALI).

1174. Soient E l'ellipse maximum circonscrite au triangle ABC, A_1, B_1, C_1, les points de Frégier de A, B, C (points de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans E et ayant respectivement leurs sommets en A, B, C). Démontrer que

1° La circonférence circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$ a pour diamètre HH_0 (H_0 réciproque de l'orthocentre H).

2° Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables et ont même centre de gravité.

3° Les points H_0 et H sont respectivement les points de Steiner et de Tarry du triangle $A_1B_1C_1$. (A. BOUTIN).

1175. Par le point d'intersection M de deux cercles donnée O et O', on mène deux sécantes rectangulaires qui coupent les deux circonférences respectivement en A et B, en A' et B'. Soient S, S' les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments AB, A'B'. Trouver 1° le lieu des points S, S'; 2° le lieu du milieu de la distance SS'.

(E. N. BARISIEN).

×**1176.** On donne un triangle équilatéral de côté a. Des sommets du triangle comme centres, avec a pour rayon, l'on décrit trois circonférences A. On trace ensuite la circonférence circonscrite aux trois premières. On détermine ainsi trois groupes de trois figures égales à périmètre curviligne, dont on propose d'évaluer les surfaces.

NOTE. L'ensemble des lignes tracées est effectivement réalisé dans certains motifs d'ornementation. (H. BROCARD).

Digitized by Google

EXERCICES,

par M. E. N. Barisien(*).

1. D'un point M du plan d'une parabole de foyer F, on mène à la parabole les tangentes dont les points de contact sont T_1 et T_2 et on abaisse les normales dont les pieds sont N_1, N_2 et N_3.

Le lieu des points M tels que l'on ait la relation

$$FN_1 . FN_2 + FN_2 . FN_3 + FN_3 . FN_1 = FT_1 . FT_2$$

est une parabole ayant son sommet au foyer de la parabole donnée.

2. La corde du cercle osculateur d'une parabole, menée par le point d'osculation parallèlement à l'axe, est égale à quatre fois la distance du point d'osculation au foyer de la parabole.

Cette propriété se déduit immédiatement de l'abscisse $\alpha = 3x + p$ du centre du cercle osculateur; la corde considérée a pour longueur $2(\alpha - x)$.

3. On donne une ellipse E et une ellipse E′, concentriques et de mêmes directions d'axes. Soit PQ une corde de E′, polaire d'un point quelconque M de E. Montrer que : 1° la perpendiculaire abaissée de M sur PQ est normale à une ellipse fixe; 2° il existe une infinité d'ellipses E telles que la courbe lieu de la projection de M sur PQ soit une ellipse. L'une de ces ellipses E est le cercle orthoptique de l'ellipse E′.

4. On considère une ellipse de foyers F et F′, dont les points de rebroussement de la développée sont α et α' sur le grand axe, β et β' sur le petit axe de sorte que $O\alpha = \frac{a^2}{c}$, $O\beta = \frac{b^2}{c}$. La normale en un point M variable de l'ellipse rencontre le grand axe en N et le petit axe en N_1. Soient : N′ le conjugué harmonique de N par rapport à α et α'; N'_1 le conjugué harmonique de N_1 par rapport à β et β'. Montrer que : 1° la droite $N'N'_1$ est tangente à l'ellipse ayant pour sommets les points α, α', β, β'; 2° la droite $N'N'_1$ passe par l'orthocentre du triangle MFF′.

5. Soit AB un diamètre fixe d'une circonférence donnée; on considère un point variable M sur cette circonférence et le symétrique M′ de M

(*) Notre zélé collaborateur nous a adressé depuis trois ou quatre ans un très grand nombre de problèmes ou de théorèmes intéressants. Comme il nous est impossible de les utiliser tous sous forme de questions proposées, nous nous contentons d'en publier les énoncés en engageant nos lecteurs à en chercher les solutions. (*Rédaction*).

Digitized by Google

par rapport à AB. Trouver 1° l'enveloppe de la parabole inscrite dans le quadrilatère AMBM′ ; 2° l'enveloppe des deux paraboles circonscrites à ce quadrilatère ; 3° l'enveloppe de l'hyperbole équilatère circonscrite à ce quadrilatère ; 4° le lieu du centre de cette hyperbole.

6. Le lieu des points tels que le triangle formé par ce point et les extrémités de sa corde polaire par rapport à une ellipse donnée, ait son orthocentre sur l'ellipse, est une sextique.

7. Soient : M′ le point où le cercle osculateur en M à une ellipse rencontre cette courbe ; M″ le symétrique de M′ par rapport au centre O l'ellipse. On considère le cercle tangent en M à l'ellipse et passant par le point M″. Montrer que le lieu du centre de ce cercle est une sextique dont l'aire est le tiers de l'aire de la développée de l'ellipse.

8. Trouver l'enveloppe de la droite

$$x \cos^n \alpha + y \sin^n \alpha = a$$

lorsque α varie et montrer que, dans les cas particuliers suivants, on a, pour $n = 1$, un cercle ; $n = 2$, un point ; $n = 3$, une kreuzcurve ; $n = 4$, deux hyperboles équilatères ; $n = 6$, deux quartiques ; $n = \frac{4}{3}$, deux cubiques ; $n = \frac{8}{3}$, deux sextiques.

9. On donne une ellipse E et une droite D. Soient M un point variable de D et PQ sa corde polaire par rapport à E. Le lieu de l'orthocentre du triangle MPQ est une cubique. 1° Etudier pour quelle position de la droite D, cette cubique se réduit à une conique ; 2° Trouver l'enveloppe de la cubique, lorsque D se déplace parallèlement à elle-même ou passe par un point fixe. 3° Cas où la droite D est une directrice de E. 4° Étudier la même question en remplaçant l'ellipse E par une parabole P.

10. On donne une ellipse E de centre O, de sommets A et A′ du grand axe et de sommets B et B′ du petit axe. Soit M un point variable de E. On considère la parabole P_1 et l'hyperbole équilatère H_1 qui sont tangentes en A à MA et en A′ à MA′ ; la parabole P_2 et l'hyperbole équilatère H_2 qui sont tangentes en B à MB et en B′ à MB′. 1° Les paraboles P_1 et P_2 ont pour seule corde commune à distance finie une droite Δ qui passe par le milieu de OM. La parallèle menée par M à Δ est la corde d'intersection de l'ellipse E avec son cercle osculateur en M. 2° La droite Δ est aussi une corde commune des deux hyperboles H_1 et H_2.

Digitized by Google

11. Étant donnée une ligne droite AA′ dont le milieu est B, on considère les deux circonférences de diamètres respectifs AB et A′B. Soient C et C′ deux points pris l'un sur le cercle AB, l'autre sur le cercle A′B′, et symétriques par rapport à la tangente commune en B aux deux cercles; D et D′ les projections des points C, C′ sur AA′. Montrer que 1° le lieu du milieu de la distance entre les centres des cercles inscrits dans chacun des triangles CDA et C′D′B, est une ligne droite; 2° le lieu du centre des symédianes du triangle CDA est une courbe fermée dont l'aire est les $\frac{9}{32}$ de l'aire du cercle AB.

12. On considère une ellipse E et l'hyperbole équilatère H ayant pour sommets réels les foyers de E. D'un point M quelconque de H, on mène les tangentes à E, ayant leurs points de contact en P et Q. Le lieu du point de rencontre des normales à E en P et Q est une sextique ayant pour équation

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2 (x^2 - y^2) = c^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2.$$

(*A continuer*).

SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES;

par M. J. Neuberg.

1. Soient

$$\left.\begin{aligned} l_1x + m_1y + n_1z &= 0, \\ l_2x + m_2y + n_2z &= 0, \\ l_3x + m_3y + n_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les équations des côtés d'un triangle A′B′C′ homologique avec le triangle de référence ABC.

Les points de rencontre des côtés correspondants des deux triangles sont définis par les systèmes

$$A'' \left\{\begin{aligned} x &= 0, \\ m_1y + n_1z &= 0; \end{aligned}\right. \quad B'' \left\{\begin{aligned} y &= 0; \\ n_2z + l_2x &= 0; \end{aligned}\right. \quad C'' \left\{\begin{aligned} z &= 0; \\ l_3x + m_3y &= 0. \end{aligned}\right.$$

En exprimant qu'ils vérifient une même équation

$$lx + my + nz = 0,$$

on trouve

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{n}{l} = \frac{n_2}{l_2}, \quad \frac{l}{m} = \frac{l_3}{m_3};$$

Digitized by Google

d'où la condition *nécessaire et suffisante :*

$$l_2 m_3 n_1 = l_3 m_1 n_2. \qquad (2)$$

Donc, si l'on avait $l_2 = m_1$, $m_1 = n_2$ (ce que l'on peut toujours obtenir en multipliant les équations (1) par des facteurs convenables), on aurait nécessairement $m_1 = l_3$. Donc, les côtés d'un triangle A'B'C' homologique avec le triangle de référence ABC peuvent être représentés par trois équations.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients sont les éléments d'un déterminant symétrique ($a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

L'axe d'homologie A''B''C'' a pour équation

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0.$$

3. Désignons par L_1, M_1, N_1,... les mineurs du déterminant

$$H = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Des équations (1), on déduit les coordonnées des points :

$$A'\ldots \frac{x}{L_1} = \frac{y}{M_1} = \frac{z}{N_1};$$

$$B'\ldots \frac{x}{L_2} = \frac{y}{M_2} = \frac{z}{N_2},$$

$$C'\ldots \frac{x}{L_3} = \frac{y}{M_3} = \frac{z}{N_3}.$$

Les droites AA', BB', CC' ayant pour équations

$$\frac{y}{M_1} = \frac{z}{N_1}, \quad \frac{z}{N_2} = \frac{x}{L_2}, \quad \frac{x}{L_3} = \frac{y}{M_3},$$

Digitized by Google

la condition pour qu'elles concourent s'obtient en multipliant les équations précédentes membre à membre :

$$L_2M_3N_1 = L_3M_1N_2. \qquad (3)$$

On en conclut qu'on peut représenter les coordonnées des sommets d'un triangle A'B'C' homologique avec le triangle de référence par les éléments d'un déterminant symétrique.

3. Les conditions (2) et (3), on le sait par la géométrie, sont équivalentes. Par conséquent, la quantité $L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2$ qui est du 6e degré en l_1, m_1,... doit être divisible par la quantité $l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2$, et le quotient est du 3e degré. Remarquons que si les droites (1) concourent, l'égalité (3) est vérifiée; car les droites joignant A, B, C aux points de concours des droites (1) prises deux à deux sont alors concourantes; donc $L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2$ doit être divisible par H. Effectivement, on peut vérifier l'identité

$$L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2 = (l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2).H, \qquad (4)$$

en faisant le produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & n_1 & -m_1 \\ -n_2 & 0 & l_2 \\ m_3 & -l_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

dont le premier représente la quantité $l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2$.

L'identité (4) met en évidence la propriété que l'existence d'un axe d'homologie entraîne celle d'un centre d'homologie et réciproquement, excepté dans le cas où l'un des triangles se réduit à un point(*).

4. Considérons une conique quelconque U, ayant pour équation

$$U \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0,$$

et appelons A'B'C' le triangle formé par les polaires des sommets du triangle de référence. Ces polaires ont pour équations

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \text{ etc. ;}$$

comme les coefficients de ces équations sont les éléments d'un déterminant symétrique, les triangles ABC, A'B'C' sont homologiques; récipro-

(*) Ces développements sont inédits ou du moins peu connus. La démonstration analytique de l'identité (4) est peut-être nouvelle. On obtient deux autres identités analogues, en intervertissant deux indices. Ainsi

$$L_3M_1N_3 - L_1M_3N_3 = (l_3m_1n_3 - l_1m_3n_3)H.$$

Digitized by Google

quement, deux triangles homologiques sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique U.

Les intersections des côtés non homologues des deux triangles sont six points d'une seconde conique U_1 ; car les côtés correspondants des deux triangles sont les côtés opposés d'un hexagone de Pascal. Soit

$$U_1 \equiv b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx = 0$$

l'équation de cette conique. Les points d'intersection de BC avec cette courbe ou avec les droites A'C', A'B' étant définis par l'une ou l'autre des équations

$$b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 = 0, \quad (a_{22}y + a_{23}z)(a_{32}y + a_{33}z) = 0,$$

on peut poser

$$b_{22} = a_{22}, \quad b_{33} = a_{33}, \quad 2b_{23} = a_{23} + \frac{a_{22}a_{33}}{a_{23}},$$

d'où l'on conclut

$$U_1 \equiv \Sigma a_{11}x^2 + \Sigma\left(a_{23} + \frac{a_{22}a_{33}}{a_{23}}\right)yz = 0.$$

5. On verrait d'une manière analogue que les droites joignant les sommets non homologues des deux triangles ABC, A'B'C' sont tangentes à une même conique ayant pour équation tangentielle

$$\Sigma A_{11}\lambda^2 + \Sigma\left(A_{23} + \frac{A_{22}A_{33}}{A_{23}}\right)\mu\nu = 0,$$

si l'équation tangentielle de u est

$$\Sigma A_{11}\lambda^2 + 2\Sigma A_{23}\mu\nu = 0.$$

Les points de rencontre de BC avec AB' et AC', de CA avec BA' et BC', de AB avec CA' et CB' appartiennent à la conique représentée par

$$\Sigma\frac{x^2}{A_{11}} - \Sigma\left(\frac{A_{23}}{A_{22}A_{33}} + \frac{1}{A_{23}}\right)yz = 0.$$

Enfin, les droites joignant les points A, B, C aux points où les côtés opposés du triangle ABC sont rencontrés par les côtés non homologues du triangle ABC, touchent la conique dont l'équation est

$$\Sigma\frac{\lambda^2}{a_{11}} - \Sigma\left(\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}} + \frac{1}{a_{23}}\right)\mu\nu = 0.$$

Digitized by Google

SUR UNE ÉQUATION DE PELL;

par M. A. BOUTIN.

Nous avons choisi l'équation

$$y^2 - 3x^2 = 1, \tag{1}$$

mais un certain nombre des formules qui suivent sont généralisables pour l'équation : $y^2 - ax^2 = 1$. Quant aux remarques numériques particulières à la valeur du coefficient a, elles présentent plus ou moins d'intérêt, suivant cette valeur de a.

L'équation (1) est complètement résolue par les suites :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 15, \ldots, \quad x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 7, \quad y_3 = 26, \ldots, \quad y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2}.$$

On sait d'ailleurs que

$$x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}. \tag{2}$$

De ces valeurs (2), on déduit immédiatement, soit directement, soit par un groupement convenable de termes, les séries :

$$x_n = 4^{n-1} - (n-2)4^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}4^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}4^{n-7} + \ldots$$

$$y_n = 2^{2n-1} - n.2^{2n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{2n-6} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{2n-15} + \ldots;$$

pour m impair (au signe près) :

$$y_m = 2m - 2^3\frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + 2^5\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2\ 3.4.5} - \ldots,$$

$$x_m = 1 - 2^2\frac{m^2-1}{1.2} + 2^4\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} - \ldots;$$

$$y_m = 2 + 2.3\frac{m^2-1}{1.2} + 2.3^2\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} + \frac{2.3^3(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$x_m = m + 3\frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + 3^2\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} + 3^3\frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots;$$

Digitized by Google

pour m pair (au signe près) :

$$y_m = 1 - 2^2\frac{m^2}{1.2} + 2^4\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} - 2^6\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$x_m = 2m - 2^3\frac{m(m^2-4)}{1.2.3} + 2^5\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5} - \cdots;$$

$$y_m = 1 + 3\frac{m^2}{1.2} + 3^2\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} + 3^3\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$x_m = m + 3\frac{m(m^2-4)}{1.2.3} + 3^2\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

On peut obtenir d'autres développements en série de la manière suivante : considérons l'équation :

$$y^2 - (m^2-1)x^2 = 1$$

dont la proposée n'est qu'un cas particulier pour $m = 2$. Cette équation est résolue par les suites :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2m, \ldots, x_n = 2mx_{n-1} - x_{n-2}$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = m, \quad y_2 = 2m^2 - 1, \ldots, y_n = 2my_{n-1} - y_{n-2}$$

x_n et y_n sont donc des polynomes entiers en m. Ces polynomes, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$(m^2-1)\frac{d^2x_n}{dm^2} + 3m\frac{dx_n}{dm} - (n^2-1)x_n = 0,$$

$$(m^2-1)\frac{d^2y_n}{dm^2} + m\frac{dy_n}{dm} - n^2y_n = 0.$$

Développant x_n et y_n suivant les puissances croissantes ou décroissantes de m, et profitant des équations différentielles précédentes pour déterminer les coefficients inconnus, on obtient, pour $m = 2$, des séries nouvelles, en particulier :

$$x_n = n.2^{n-1} + 3.2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 3^2.2^{n-5}\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

$$x_n = \frac{n}{1} + \frac{n(n^2-1)}{1.1.3} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.1.3.5} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2\ 3.1.3.5.7} + \cdots$$

$$y_n = 1 + n^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.1.3} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.1.3.5} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2.3.4.1.3.5.7} + \cdots$$

Digitized by Google

Les formules (2) permettent de vérifier les identités :

$$y_n = 2x_n - x_{n-1}$$
$$x_n^2 = x_{n-1}x_{n+1} + 1.$$
$$y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1} - 3$$

d'où l'on déduit les suites numériques :

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.15} + \cdots + \frac{1}{x_n x_{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.7} + \frac{1}{7.26} + \cdots + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.19} + \frac{1}{19.71} + \cdots + \frac{1}{(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_{n+1})} + \cdots$$

Les mêmes formules (2) donnent :

$$y_{2n} = 6x_n^2 + 1, \quad y_{2n+1} = (x_n + x_{n+1})^2 + 1.$$

Ces égalités montrent que y_n ne saurait être un carré, car les racines de $y^2 = 6x^2 + 1$ sont différentes de celles de la proposée, et par suite l'équation

$$y^4 = 1 + 3x^2$$

est impossible en nombres entiers.

La suite des nombres x ne comprend aucun nombre premier, car x_{2n} est divisible par 4 et par x_n; et x_{2n+1} admet la décomposition :

$$x_{2n+1} = (x_n + y_n)(x_n + x_{n+1}).$$

Enfin, les formules de récurrence permettent de vérifier les identités :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n - 1),$$

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots + x_{2n} = \frac{1}{6}(x_{2n+1} + x_{2n} - 1),$$

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{2n+1} = -\frac{1}{6}(x_{2n+2} + x_{2n+1} + 1),$$

$$x_1^2 + y_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{x_n y_{n+1} - n}{6},$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_n + 1),$$

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{1}{2}(x_n y_{n+1} + n + 2).$$

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von MORITZ CANTOR. Dritter (Schluss) Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. Dritte Abteilung. Die Zeit von 1727 bis 1758. Mit 70 Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1898 (Grand in-8°, de XIV et 421 pages). Prix : 12 marcs.

M. Cantor vient d'achever le grand ouvrage sur l'histoire des mathématiques dont il a commencé la publication en 1880, et dont le tome premier a eu une seconde édition en 1894. Il est inutile de faire l'éloge d'un livre que le nom de son auteur recommande suffisamment et qui a été le point de départ d'une foule de recherches historiques depuis dix-huit ans. Qu'il nous suffise de dire ici que c'est grâce à ce livre que l'enseignement de l'histoire de la science mathématique peut être organisé d'une manière sérieuse et régulière dans les Universités où, comme en Belgique, il fait partie obligatoire du programme du Doctorat. Avant la publication de la *Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, il manquait un guide sûr aussi bien aux professeurs qu'aux élèves : un bien petit nombre des maîtres eux-mêmes avaient une idée exacte du développement historique des mathématiques avant l'époque moderne. Il n'en est plus ainsi aujourd'hui. Les *Vorlesungen* du savant et consciencieux professeur de Heidelberg sont et seront pour longtemps, dans toutes les universités, la base d'un enseignement sérieusement historique des mathématiques, d'autant plus que l'auteur, autrefois si hardiment aventureux dans le maniement des hypothèses, lorsqu'il écrivait ses *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, est devenu de plus en plus prudent, de plus en plus objectif, à mesure qu'il avançait dans la publication de son œuvre capitale.

Mathesis a analysé sommairement au fur et à mesure de leur publication les diverses parties des *Vorlesungen* [1882, II, pp. 11-15, (Tome I); 1892, XII, pp. 19-20 (Tome II, 1re section); 1893, XIII, p. 16 (Tome II, 2e section); 1894, XIV, pp. 136-137 (Tome III, 1re section; tome I, 2e édition); 1890, XVI, pp. 68 (Tome III, 2e section)].

Voici de même un rapide aperçu des sujets abordés dans la troisième section du tome III, qui va de la mort de Newton (1727), aux premières publications de Lagrange (1758). Dans ce quart de siècle, c'est Euler, qui est le géomètre inventeur par excellence. Aussi M. Cantor analyse-t-il ses principaux ouvrages avec son exactitude et sa clarté habituelles, en en rapprochant les travaux contemporains.

Préface. M. Cantor indique les difficultés que l'on rencontrera inévitablement quand on voudra faire l'histoire moderne des mathématiques et il nomme parmi ceux qui pourraient l'entreprendre avec lui, Fr. Engel, Fr. W. Meyer, F. Rudio, P. Stäckel. Ensuite il signale pour les deux sections précédentes du tome III, diverses corrections et additions dont il est redevable à MM. Cajori, Enestrœm, Gibson, Schwering, Sonine, Sturm, Tischer et Zeuthen.

Ch. 101. Histoire des mathématiques (Heilbronner, Weidler, Wolf, Frobes,

Digitized by Google

Stockhausen, Montucla, Doppelmayr, etc.). Editions des classiques (Cramer, Castillon, Simson). Dictionnaires (Moxon, Ozanam, Stone, Saverien, d'Alembert). 102. Le calcul, surtout en Allemagne. 103. Traités de géométrie élémentaire (Varignon, Wolf, De la Chapelle, Th. Simson, Malezieu). Théorie des parallèles : Saccheri. 104. Recherches spéciales de mathématiques élémentaires (Simson, Stewart, Dufay, Naudé, Euler, etc.). 105. L'algèbre jusque 1745 (Maclaurin, Campbell, Reyneau, Euler, Kästner, de Gua). 106. L'algèbre après 1745 (Euler, d'Alembert, Fontaine, Maclaurin, König, Cramer, Segner). 107. Théorie des nombres (Euler surtout). 108. Théorie des combinaisons, Calcul des probabilités (Euler, de Mairan, Nicole, Moivre, Daniel Bernoulli, Buffon, Th. Simpson, Jean Bernoulli, Süssmilch, Kerseboom, Maclaurin, d'Alembert). 109-110. Séries (Goldbach, Moivre, Stirling, Euler, Maclaurin, les analystes japonais, Simpson, Nicolas I Bernoulli, Daniel Bernoulli). 111. Le tome 1er de l'Introduction à l'analyse des infiniment petits d'Euler. 112. Les séries, de 1749 à 1754. Les principes du calcul différentiel (Euler, Kühn, d'Alembert, Berkeley, Maclaurin, etc.). 113. Le calcul différentiel d'Euler. 114. La géométrie analytique jusque 1740 (Grandi, Maupertuis, Nicole, de Bragelongne, Clairaut, Braikenridge, De Gua). 115. La géométrie analytique, 1740-1748. Maclaurin. Le tome II de l'Introduction d'Euler. 116. La géométrie analytique, 1748-1756 (Euler, Maria Agnesi). Cramer (Krafft, Jacquier, du Séjour, Goudin). 117. Maxima et minima. La *Methodus inveniendi* etc. d'Euler. 118. Intégrales définies. Equations différentielles (Euler, Maclaurin, d'Alembert, Hermann, J. Bernoulli, Goldbach, Nicolas II Bernoulli, Fontaine, Clairaut, D. Bernoulli, etc.). (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**13.** *Sur les triangles orthogonalement circonscrits à un triangle donné* ABC. — On mène les droites GF, FE, EG respectivement perpendiculaires en B sur BC, en C sur CA, en A sur AB; ensuite les droites G'F', F'E', E'G' respectivement perpendiculaires en C sur BC, en A sur CA en B sur AB. On forme ainsi les triangles EFG et E'F'G' orthogonalement circonscrits à ABC.

Les côtés parallèles de ces triangles, savoir FG et F'G', FE et F'E', EF et E'F' étant symétriques par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, les triangles eux-mêmes sont symétriques par rapport à O; il en résulte que les droites EE', FF', GG' passent par O et y sont divisées en deux parties égales.

Soient A', B', C' les intersections des côtés EF et E'G', EG et G'F',

Digitized by Google

FG et F'E'; ces points sont les symétriques de A, B, C par rapport à O.

Il est facile de trouver le rapport de similitude des triangles ABC et EFG. En effet

$$BF = BC \cot C, \quad BG = \frac{AB}{\sin B} = \frac{BC \sin C}{\sin A \sin B} = BC (\cot A + \cot B);$$

d'où

$$\frac{FB}{BC} = \cot A + \cot B + \cot C = \cot V,$$

V étant l'angle de Brocard.

Par conséquent,

$$EFB = ABC. \cot^2 V = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4ABC}.$$

O est le point de Lemoine des triangles EFG, E'F'G'. Car les points A', B', C', A, B, C étant sur une même circonférence, les droites CC' et AB' (ou F'G') sont antiparallèles par rapport à l'angle E'F'G'. On en conclut que CC', AA', BB' sont les antiparallèles menées par O dans les angles du triangle E'F'G'; comme O est leur milieu commun, il coïncide avec le centre des médianes antiparallèles du triangle E'F'G'.

Les côtés des deux triangles EFG, E'F'G' enveloppent une conique de centre O; leurs points de contact sont les pieds des hauteurs de ces triangles.

Ces diverses propriétés sont dues à MM. Lemoine et Brocard. Il n'était peut-être pas inutile de les rappeler(*).

On peut aussi observer que les côtés du triangle ABC sont rencontrés par les côtés non homologues des deux triangles EFG et E'F'G' en six points d'une même conique.

14. ***Cissoïde et strophoïde.*** On donne une circonférence et un diamètre fixe AB. Soit P un point variable de la courbe. La perpendiculaire en A à AP et la perpendiculaire abaissée de P sur AB se coupent en C.

Le point C décrit une cissoïde et le milieu M de PC une strophoïde.

Ce théorème, facile à démontrer, est peut-être nouveau.

(Droz Farny).

(*) Un de nos jeunes lecteurs, les croyant nouvelles, nous les avait transmises comme questions à proposer.

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1076.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 192).

On considère une ellipse E *et une cercle* Σ. *D'un point quelconque* M *de* Σ *on mène à* E *les tangentes dont les points de contact sont* P *et* Q. *Le cercle circonscrit au triangle* MPQ *rencontre l'ellipse en deux autres points* P′ *et* Q′; *les tangentes à* E *en* P′ *et* Q′ *se rencontrent en* M′.

1° *Le lieu de* M′ *est en général un cercle lorsque le point* M *se déplace sur* Σ.

2° *Si* Σ *passe par le centre de* E, *le lieu de* M′ *est une droite.*

3° *Réciproquement, si le point* M *au lieu de parcourir le cercle* Σ *décrit une droite s, le lieu de* M′ *est un cercle passant par le centre de* E.

4° *En général le point* M′ *est situé sur le cercle circonscrit au triangle* MPQ. (E. N. Barisien).

Solution par M. Cl. Servais. La question proposée est un corollaire du théorème suivant dû à M. Deprez (*Mathesis*, (2), II, p. 255).

Les points M *et* M′ *et les points de contact des tangentes menées par* M *et* M′ *à une conique donnée peuvent être situés sur une même circonférence; cela arrive lorsque le symétrique de* M′ *par rapport à l'axe focal de la conique est l'inverse de* M *par rapport au cercle décrit sur la distance des foyers comme diamètre.*

Si la courbe donnée est une parabole, la même condition exige que M *et* M′ *soient symétriques par rapport au foyer.*

Nous allons établir géométriquement cette intéressante propriété.

1. Conique a centre. D'après un théorème connu, les six points M, P, Q, M′, P′, Q′ sont sur une conique qui, dans le cas actuel, est un cercle. Les cordes PQ, P′Q′ sont également inclinées sur les axes de E et leurs diamètres conjugués OM et OM′ jouissent de la même propriété.

(*) Nous avons oublié de mentionner de bonnes solutions de la question 1141 par M. François, des questions 1125, 1134 et 1136 par M. Bogdan Jonesco.

Digitized by Google

Par suite, si le point M décrit le diamètre OM, le point M′ décrit le diamètre OM′.

A un point M correspond d'ailleurs un point déterminé M′ et réciproquement, les ponctuelles engendrées par ces points sont donc projectives. Le centre O de la conique E est un point-limite sur chacune de ces ponctuelles, ce qui montre que le produit OM. OM′ a une valeur constante si le point M se déplace sur OM. Pour déterminer cette valeur, nous supposerons le point M sur le cercle de Monge de la conique E. Le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ est alors le milieu du segment PQ. La droite MM′ qui est la polaire par rapport au cercle MPQ et à la conique E, du point commun aux droites PQ et P′Q′, est dans notre hypothèse, perpendiculaire à PQ. Les droites conjuguées normales PQ et MM′ rencontrent donc l'axe focal de E, en deux points K et H tels que

$$OK.\ OH = c^2$$

$2c$ étant la distance focale.

Mais $$OM.\ OM' = OH.\ OK';$$

par conséquent c^2 est la valeur du produit OM. OM′, ce qui établit la propriété énoncée.

Remarque. Si le point M est sur la conique E, le cercle MPQ devient le cercle décrit sur le rayon de courbure en ce point comme diamètre. Par suite : *Le pôle de la seconde corde d'intersection d'une conique* E *avec la circonférence ayant pour diamètre le rayon de courbure en un point variable* M *de cette conique* E, *décrit la courbe inverse de* E *par rapport à son centre ; la puissance d'inversion est égale au carré de la demi-distance focale.*

II. Parabole. Si le point M est sur l'axe de la parabole, le centre de la circonférence MPQ est le foyer et le point M′ est le symétrique de M par rapport au foyer. Si le point M est sur la directrice, le centre de la circonférence MPQ est le milieu du segment PQ, et la droite MM′ qui est la polaire par rapport au cercle et à la parabole, du point commun aux droites PQ et P′Q′, est perpendiculaire à la droite PQ et passe par le foyer. Le point M′ est donc encore le symétrique de M par rapport au foyer, si le point M a une position quelconque dans le plan de la parabole. Les diamètres conjugués m et m' des cordes PQ et P′Q′ également

Digitized by Google

inclinées sur l'axe sont équidistants de cet axe. Par suite, si le point M décrit une ponctuelle sur m, le point M′ décrit une ponctuelle projective sur m'. Ces ponctuelles sont projetées du foyer suivant deux faisceaux projectifs, ayant trois rayons doubles : l'axe de la parabole et les deux droites joignant le foyer, aux points où les diamètres m et m' coupent la directrice. Le foyer est donc le centre de perspective des ponctuelles m et m', et on a la propriété :

Si deux points M *et* M′ *sont symétriques par rapport au foyer d'une parabole, les points de contact des tangentes issues de ces points, sont sur un cercle passant par* M *et* M′.

Corollaire. *Si* P *et* Q *sont les points de contact des tangentes menées d'un point* M *à une parabole, la droite joignant le foyer* F *au centre du cercle circonscrit au triangle* MPQ, *est perpendiculaire à la droite* MF.

Si l'on suppose le point M sur la parabole, on obtient une propriété bien connue :

Le pôle de la seconde corde d'intersection d'une parabole E, *avec la circonférence ayant pour diamètre le rayon de courbure en un point variable* M *de cette conique, décrit la parabole symétrique de* E *par rapport à son foyer.*

III. Quadriques. Deux sections planes d'une quadrique s sont situées sur une quadrique s', passant par les pôles M et M′ des plans de ces sections. Si la quadrique s' est une sphère, les sections considérées seront nécessairement des cercles, et les points M et M′ seront sur les diamètres conjugués des sections circulaires. Le plan principal contenant ces diamètres coupera s' suivant un cercle passant par M et M′ et les points de contact des tangentes menées de M et M′ à la section principale. Donc (I, II) le produit OM.OM′ est égal au carré de la demi distance focale de cette section principale, ou dans le cas du paraboloïde elliptique, M et M′ sont symétriques par rapport au foyer de cette section.

Solution analogue par MM. Duporoq et Soons; solutions analytiques par MM. Dépresz, Gillet, Droz Farny et Francq.

La question 1076 est comprise, si l'on veut, dans la question 1119 (voir *Mathesis*, p. 139); elles se complètent l'une l'autre.

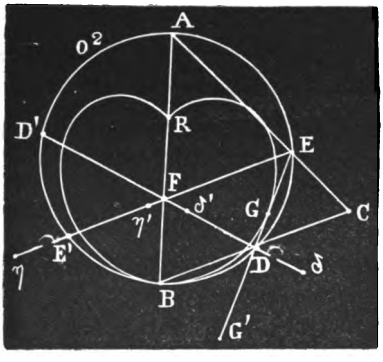
Digitized by Google

Question 1111.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 80 et 102).

Dans un triangle isoscèle ABC, *le côté* AB *est fixe et sa base* BC *tourne autour de* B. *Démontrer que deux côtés du triangle orthique de* ABC *enveloppent une même hypocycloïde de Steiner, et que le troisième côté enveloppe une cardioïde.* (Droz Farny).

Solution par M. V. Retali. Soient AD, BE, CF les hauteurs et D′, E′ les intersections ultérieures de DF, EF avec le cercle O^2 décrit sur AB comme diamètre. On a évidemment arc BD = DE, arc BD′ = — 2BD, arc BE = — 2BE′ : si le point D parcourt le cercle O^2 d'un mouvement uniforme avec la vitesse v, les vitesses des points D′ et E′ sont égales à $-2v$ et celle du point E est $2v$. L'enveloppe des droites DD′, EE′ est donc, d'après un théorème de Cremona,(*) l'hypocycloïde de Steiner, ayant un sommet au point B, et tritangente au cercle O^2.



Quant à l'enveloppe de la droite DE, appelant r le rayon du cercle O^2, on obtient une cardioïde par le roulement d'un cercle ayant le rayon $\frac{1}{3}r$ sur un cercle égal, concentrique à O^2; elle a son sommet en B, et son rebroussement (réel) en un point R tel que $AR = \frac{2}{3}r$. En prenant sur DE le point G tel que $DG = \frac{1}{3}DE$, G est le point de contact de la droite DE avec son enveloppe. Le lieu du point G′, conjugué harmonique de G par rapport aux points D et E, est la développante de notre cardioïde. De même, si $D\delta = -DD'$, $E'\eta = -E'E$, les points δ et η(**) sont respectivement les points de contact des droites DF et FE avec l'hypocycloïde de Steiner; et le lieu du conjugué harmonique de δ par

(*) Si deux rayons OD, OD′ d'un cercle O^2 tournent simultanément autour du centre O, dans un sens opposé et avec des vitesses v et $-2v$, l'enveloppe de la corde DD′ est une hypocycloïde de Steiner (Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, Crelle, t. 64, page 106).

(**) Ces points ne sont pas sur la figure à la distance indiquée.

Digitized by Google

rapport à DD′ (de η par rapport à EE′) est la développante de la même courbe.

Il n'est pas difficile de démontrer le théorème général suivant : lorsque sur un cercle O^2 deux points P et P′ sont en mouvement avec des vitesses constantes dont le rapport est k, l'enveloppe de la droite PP′ est une épicycloïde ou une hypocycloïde, suivant que k est $>$ ou <0. Si R est le rayon du cercle fixe, R′ celui du cercle mobile et r celui de O^2, nous avons

$$R = \frac{r(1-k)}{(1+k)}, \quad R' = \frac{kr}{1+k}.$$

Le cercle O^2 contient les sommets de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde. On obtient le point qui décrit l'épicycloïde (l'hypocycloïde) en divisant intérieurement (extérieurement) le segment PP′ dans le rapport $k : 1$. Si $k = -\frac{1}{2}$, nous avons $R = 3r$, $R' = -r$ et l'on tombe sur le théorème de Cremona; si $k = \frac{1}{2}$, $R = R' = \frac{1}{3}r$, on obtient la cardioïde, etc.

M. Déprez a résolu la même question et fait observer que les bissectrices de l'angle C du triangle ABC et le rayon du cercle circonscrit issu de C enveloppent des épicycloïdes.

M. Barisien nous communique, au sujet de la même figure, les remarques suivantes : Soient A′, B′, C′, les pieds des hauteurs du triangle ABC. 1° Le lieu du milieu de A′C′ est une ellipse. 2° Le lieu du milieu de B′C′ est une quartique unicursale ayant pour aire $\frac{1}{4}\pi$. 3° Le lieu du milieu de A′B′ est une courbe unicursale fermée ayant pour aire $\frac{5}{32}\pi$.

Question 1142.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 238).

On donne deux droites rectangulaires OAX, OBY *et un point* P, *par lequel on mène une sécante* PAB. *Trouver le lieu des foyers de l'ellipse tangente en* A *et* B *aux deux droites fixes et admettant ces mêmes points pour sommets.* (H. Brocard).

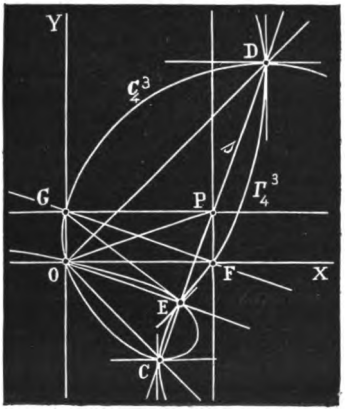
Solution par M. Retali. Les cercles A^2 et B^2 passant par O et ayant les centres A et B (*), coupent les droites b et a, menées par B et A parallèlement aux axes, en des points du lieu cherché. Les cercles A^2 forment

---

(*) Ces points ne sont pas marqués sur la figure.

Digitized by Google

un faisceau projectif au faisceau de rayons parallèles X^{∞} $(b,\ldots)$ et le lieu des points (A^2b) est donc *une cubique circulaire* C_4^3 *qui passe par* X^{∞} *et dont* O *est un point double*. A la droite de l'infini, considérée comme rayon du faisceau X^{∞}, correspond le cercle ayant pour centre la projection F de P sur l'axe OX : *les tangentes à* C_4^3 *aux points circulaires à l'infini vont se couper au point* F, *foyer double*. Au rayon mené par P et coupant OY au point G, correspond le cercle dégénéré formé par l'axe OY et la droite à l'infini, par suite C_4^3 *passe par* G *et son asymptote réelle est la droite* PG. Les points de contact des tangentes menées à C_4^3 par son point X^{∞} sont les symétriques de O par rapport aux parallèles menées par P aux bissectrices des angles des axes : nous les appelons C et D, ils sont évidemment symétriques par rapport à P et, comme ils sont *conjugués*, la droite qui les unit coupe la courbe en un troisième point E dont le tangentiel est G; les points E et X^{∞} étant un deuxième couple de points conjugués sur la cubique, *les tangentes au point double sont les rayons doubles de l'involution* (OC, OD; OE, OX).



De même, le lieu des points (B^2a) est une deuxième cubique circulaire Γ_4^3 ayant un point double en O, passant par les points C, D, E, F et le point à l'infini Y^{∞} de OY, l'asymptote réelle est PF, les tangentes aux points C et D sont parallèles à OY, le foyer double est G, les tangentes au point double sont les rayons doubles de l'involution (OC, OD; OE, OY), le tangentiel de E est F.

Les deux cubiques C_4^3, Γ_4^3 *se coupent orthogonalement aux trois points* C, D, E, *sur une droite s*. On voit aisément que *s* est la perpendiculaire menée par P à la droite FG, et que E est symétrique de P par rapport à FG, enfin OE est perpendiculaire à *s*.

On trouve aisément ces résultats aussi par l'analyse : si les coordonnées de P sont *a* et *b*, nous avons pour équations des deux cubiques :

$$(C_4^3) \cdots (y-b)(x^2+y^2) - 2axy = 0,$$
$$(\Gamma_4^3) \cdots (x-a)(x^2+y^2) - 2bxy = 0.$$

Digitized by Google

Les équations paramétriques sont

$$(C_4^3) \cdots x = \frac{bt^2 + 2at + b}{t(1+t^2)}, \quad y = \frac{bt^2 + 2at + b}{1+t^2};$$

$$(\Gamma_4^3) \cdots x = \frac{at^2 + 2bt + a}{1+t^2}, \quad y = \frac{t(at^2 + 2bt + a)}{1+t^2};$$

les couples des tangentes au point double sont respectivement

$$by = (-a \pm \sqrt{a^2 - b^2})x,$$
$$ay = (-b \pm \sqrt{b^2 - a^2})x;$$

l'équation de la corde commune s est

$$ax - by = a^2 - b^2;$$

les points C, D, E ont respectivement pour paramètres $-1, +1, -\frac{b}{a}$, et leurs coordonnées sont

$$(a-b, b-a), \quad (a+b, a+b), \quad \left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, \frac{b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right).$$

Lorsque P tombe sur la bissectrice OD de l'angle XOY, les deux cubiques deviennent cuspidales, elles ont l'autre bissectrice pour tangente cuspidale commune et sont symétriques l'un de l'autre par rapport à OP.

Solution par MM. Barisien, Soons, Colart et Déprez. Construisons le rectangle AOBC; C est le centre de l'ellipse, et les demi-axes sont CB = OA = a, CA = OB = b.

Soient (α,β) les coordonnées de P, (x,y) celles du foyer F; si OA > OB, on a

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1, \quad x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \quad y = b.$$

En éliminant a et b on obtient pour le lieu

$$(y-\beta)(x^2+y^2) - 2\alpha xy = 0.$$

Si $a < b$, l'équation du lieu est

$$(x-\alpha)(x^2+y^2) - 2\beta xy = 0.$$

Remarques. 1° Le centre C et les deux autres sommets de l'ellipse variable se meuvent sur des hyperboles équilatères.

(Barisien, Déprez).

2° Le cercle de Monge (cercle AOB) enveloppe une podaire d'hyperbole équilatère par rapport à O. (Déprez).

Digitized by Google

×Question 1145.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 262).

Soit ABCD *un quadrilatère gauche dans lequel les angles* A *et* B *sont égaux de même que les angles* C *et* D. *Démontrer* : 1° *que* AD = BC, AC = BD ; 2° *que la droite joignant le milieu des côtés* AB *et* CD *est perpendiculaire à ces côtés*; 3° *que la plus courte distance des côtés* AD *et* BC *est équidistante des sommets* A *et* B.

Le figure ABCD *peut être appelée un trapèze isoscèle gauche.* (Muirhead).

Solution d'après MM. Déprez *et* Maes(*). La question 1145 est la réciproque de la proposition suivante : Si un quadrilatère gauche ABCD a un axe de symétrie, c'est-à-dire si la droite joignant les milieux M, N des côtés opposés AB, CD est perpendiculaire à ces côtés, les angles A et B sont égaux, de même que les angles C et D, et l'on a AD = BC, AC = BD. Celle-ci résulte immédiatement de ce qu'une rotation de 180° autour de MN fait coïncider ADCB avec BCDA.

Pour résoudre la question proposée, soient M, N les milieux des côtés AB, CD. Construisons les parallélogrammes NDAP, NCBQ; les droites AP et QB seront égales et parallèles, donc la droite PQ passera par M et PM = MA.

Les deux trièdres APDM, BQCM sont égaux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; par suite, les arêtes AD et BC sont également inclinées sur le plan APQB des faces opposées. La même propriété appartenant à leurs parallèles NP et NQ, on a, NP = NQ, d'où AD = BC. Il est maintenant facile de voir que les deux figures APMDN, BQMCN sont superposables; donc les angles AMN et BMN, DNM et CNM sont égaux et MN est la perpendiculaire commune aux côtés AB et CB. Enfin, une rotation de 180° autour de MN faisant coïncider ADCB avec BCDA, la perpendiculaire commune à DA et BC reprend sa position primitive; donc elle s'appuie sur l'axe MN et est équidistante des points A et B.

(*) Nous modifions légèrement les constructions auxiliaires employées par nos honorables collaborateurs. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 1146.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 262).

Dans un triangle ABC, *avec les notations ordinaires, on pose*

$$\delta = 4R + r, \quad \delta_a = 4R - r_a, \ldots$$

Démontrer que

$$a\delta + br_c + cr_b = b\delta + cr_a + ar_c = c\delta + ar_b + br_a = 2p(2R + r);$$
$$a\delta_a + br_b + cr_c = b\delta_a - cr - ar_b = c\delta_a - ar_c - br = 2(p - a)(2R - r_a)$$

On a deux autres groupes analogues contenant δ_b *et* δ_c.

(E. Lemoine).

Solution par MM. Déprez, G. Delahaye, Rose (Nivelles) et Plakhovo. Vérifions l'égalité

$$a\delta + br_c + cr_b = 2p(2R + r). \qquad (1)$$

Comme on a

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

la formule (1) revient à

$$a(r_a + r_b + r_c) + br_c + cr_b = p(r + r_a + r_b + r_c),$$

ou

$$r_a(p - a) + rp = r_b(p - b) + r_c(p - c);$$

ce qui est une identité, car $S = pr = (p - a)r_a \ldots$

On démontre de même les autres formules du premier groupe.

2. Soit à vérifier l'égalité

$$-a\delta_a + br_b + cr_c = 2(p - a)(2R - r_a).$$

Mettons-la sous la forme équivalente

$$-a(r_b + r_c - r) + br_a + cr_a = (p - a)(r_b + r_c - r_a - r),$$

ou

$$r_b(p - b) + r_c(p - c) = r_a(p - a)r + rp, \text{ etc.}$$

On démontre de même les autres relations.

Digitized by Google

***Question 1164.**

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 79).

On mène par les sommets A, B, C *d'un triangle équilatéral* ABC *trois droites passant par un même point* M *et faisant avec les côtés opposés les angles* α, β, γ: *Démontrer la relation*

$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)=0.$$

(Stanham).

Quelle est la relation analogue dans un triangle rectiligne ou sphérique quelconque?

Solutions par MM. Goux (Louvain) et François (La Haye). Considérons le cas d'un triangle rectiligne quelconque. D'après un théorème connu

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC}\,\frac{\sin MBC}{\sin MBA}\,\frac{\sin MCA}{\sin MCB}=1;$$

donc

$$\frac{\sin(\alpha-B)\sin(\beta-C)\sin(\gamma-A)}{\sin(\alpha+C)\sin(\beta+A)\sin(\gamma+B)}=1.$$

Transformons les produits de sinus au moyen de la relation connue

$$4\sin\lambda\sin\mu\sin\nu=\sin(\lambda+\mu-\nu)+\sin(\lambda-\mu+\nu)+\sin(-\lambda+\mu+\nu)-\sin(\lambda+\mu+\nu);$$

Il vient

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma+2A)+\sin(\beta+\gamma-\alpha+2B)+\sin(\gamma+\alpha-\beta+2C)-\sin(\alpha+\beta-\gamma-2B)-\sin(\beta+\gamma-\alpha-2C)-\sin(\gamma+\alpha-\beta-2A)=0.$$

Réunissons le premier et le quatrième terme, le deuxième et le cinquième, le troisième et le sixième pour transformer les différences ainsi obtenues en produits. Nous aurons

$$\sin C\cos(\alpha+\beta-\gamma+A-B)+\sin A\cos(\beta+\gamma-\alpha+B-C)+\sin B\cos(\gamma+\alpha-B+C-A)=0.$$

En combinant autrement les termes, on obtient l'égalité

$$\sin(\beta-\gamma+2A)\cos 2\alpha+\sin(\gamma-\alpha+2B)\cos 2\beta+\sin(\alpha-\beta+2C)\cos 2\gamma=0.$$

Il resterait encore à résoudre la question pour un triangle sphérique; mais la relation cherchée est, probablement, assez compliquée.

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

848. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) quatre points de l'hyperbole équilatère $xy = 1$, tels que l'un d'eux soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres (groupe orthocentrique).

Démontrer les relations

$$x_1x_2x_3x_4 = -1, \quad y_1y_2y_3y_4 = -1,$$

et en déduire la solution du problème suivant : Construire un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, connaissant les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des quatre triangles $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$.

L'hyperbole équilatère passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4 passe également par les points H_1, H_2, H_3, H_4. Cette courbe est donc connue, et si (x'_1, y'_1),... désignent les coordonnées de H_1,... et (x_1, y_1)... celles de A_1,..., on a

$$x_1x_2x_3x'_4 = -1, \; x_2x_3x_4x'_1 = -1, \; x_3x_4x_1x'_2 = -1, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire

$$\frac{x_1}{x'_1} = \frac{x_2}{x'_2} = \frac{x_3}{x'_3} = \frac{x_4}{x'_4} = -x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{\sqrt[3]{x'_1x'_2x'_3x'_4}}. \qquad \text{(J. N.)}$$

849. Une parabole étant représentée par les formules

$$x = 2p \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad y = 2p \operatorname{tg} \varphi,$$

trouver la condition pour que quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de la parabole soient sur une même circonférence.

En exprimant que les droites A_1A_2, A_3A_4 ont des directions symétriques par rapport à l'axe des x, on trouve

$$\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \varphi_4 = 0.$$

On a aussi $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$, relation qu'on peut expliquer à priori : les diamètres des cordes A_1A_2, A_3A_4 sont symétriques par rapport à l'axe des x.

850. Trouver la condition pour que quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 d'une hyperbole équilatère ($xy = 1$) soient sur une même circonférence.

En dénotant un déterminant par sa première ligne, on a

$$| x_1^2 + y_1^2, \; x_1, \; y_1, \; 1 | = 0$$

ou

$$| x_1^2 + 1, \; x_1^2, \; x_1, \; x_1^2 | = 0,$$

ou, en décomposant le déterminant en deux autres,

$$| 1 - x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 | \times | x_1^3 \; x_1^2 \; x_1 \; 1 | = 0;$$

Digitized by Google

d'où l'on conclut

$$x_1\,x_2\,x_3\,x_4 = 1, \quad y_1\,y_2\,y_3\,y_4 = 1.$$

De ces relations, on peut déduire que A_4 est diamétralement opposé à l'orthocentre H_4 du triangle $A_1\,A_2\,A_3$, propriété qui résulte aussi de ce que le centre O de l'hyperbole est sur la circonférence des neuf points de $A_1\,A_2\,A_3$, et que H_4 est le centre de similitude externe de cette circonférence et de la circonférence $A_1\,A_2\,A_3$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1177. Trouver les points de contact des tangentes, perpendiculaires à l'axe polaire, menées à une courbe ayant pour équation polaire

$$r = f(\theta).$$

Application aux spirales représentées par les équations :

$r = a\theta$ (spirale d'Archimède); $r = \frac{a}{\theta}$ (spirale hyperbolique);

$r = ae^{m\theta}$ (spirale logarithmique); $r^2 = 2\frac{a^2}{\theta}$ (spirale polaire);

$r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ (cochléoïde); $r = \frac{2}{e^{a\theta} + e^{-a\theta}}$ (spirale de Poinsot);

$r^2 = a^2\theta$ (spirale parabolique de Fermat). (H. Brocard).

×**1178.** Mettre l'expression

$$\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}$$

sous la forme

$$M + M_1\cot(x-b_1) + M_2\cot(x-b_2)\ldots + M_n\cot(x-b_n),$$

les coefficients M, M_1, ... M_n ayant des valeurs indépendantes de x.

1179. Soit M un point variable situé sur une ellipse E donnée. Si Δ et Δ' sont les deux droites symétriques du grand et du petit axe de E par rapport à la tangente en M, le rapport des aires des courbes enveloppes de chacune des droites Δ et Δ' est équivalent au rapport du petit axe au grand axe de E. (E. N. Barisien).

1180. Soient M, N les points de contact des tangentes d'un point P à une ellipse donnée. Trouver le lieu du point P tel que la droite d'Euler du triangle PMN soit parallèle à un axe de symétrie de l'ellipse.

(Déprez).

Digitized by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU POINT SIMPLE D'UNE COURBE GAUCHE;

par M. F. Chomé, professeur à l'École militaire.

1. Si nous considérons un point simple A d'une courbe plane l, la tangente AT et la normale AN au point A, il pourra se présenter quatre cas :

1° Ou bien, la tangente et la normale traversent toutes deux la courbe au point A (fig. 1) et celui-ci est appelé *point d'inflexion*;

2° Ou bien, la normale seule traverse la courbe au point A (fig. 2) et celui-ci est appelé *point ordinaire*;

3° Ou bien, la tangente seule traverse la courbe au point A (fig. 3) et celui-ci est appelé *point de rebroussement de première espèce* ;

4° Ou bien, ni la tangente ni la normale ne traversent la courbe au point A (fig. 4) et celui-ci est appelé *point de rebroussement de seconde espèce.*

On sait que tout point autre qu'un point ordinaire est dit *singulier.*

2. Nous allons étudier d'une façon analogue le point simple d'une courbe gauche; mais comme en Géométrie descriptive, on ne dessine que des courbes planes, projections des courbes de l'espace, nous examinerons aussi comment se présentent ces projections, pour les différentes figures que peut présenter une courbe gauche, aux environs d'un point simple pris sur cette courbe.

3. Rappelons d'abord ce théorème connu :

Si l'on projette une courbe l (fig. 5) *sur un plan* π, *polairement ou cylindriquement, la tangente* AT *en un point* A *de la courbe l se projette sur le plan* π *suivant une droite* A'T' *tangente à la projection l' de la courbe l, au point* A', *projection du point* A, *sauf si la tangente* AT *est une projetante. Dans ce dernier cas (fig.* 6), *la tangente à la projection l' de la courbe l est la trace, sur le plan* π, *du plan osculateur de la courbe l au point* A.

4. Considérons maintenant un point simple A d'une courbe gauche l, le plan osculateur ω, le plan normal ν et un plan tangent quelconque τ, différent du plan osculateur.

Il pourra se présenter huit circonstances :

Ou bien, les trois plans ω, ν et τ traversent la courbe l au point A;

Ou bien, deux seulement de ces trois plans traversent la courbe au

Digitized by Google

point A, et ces deux plans pourront être les plans ω et ν, ou les plans ν et τ, ou les plans ω et τ;

Ou bien, un seul des plans ω, ν et τ traversera la courbe l au point A, et ce plan sera ou le plan ω, ou le plan ν, ou le plan τ;

Ou bien, aucun des trois plans considérés ne traversera la courbe au point A.

5. Nous allons, dans chacun de ces huit cas, chercher la projection de la courbe sur un plan π sécant par rapport à la tangente au point A, en supposant successivement :

a) Que le centre de projection soit au point A;

b) Que le centre de projection soit sur la tangente au point A, mais distinct du point A;

c) Que le centre de projection soit un point quelconque du plan osculateur ω au point A, mais en dehors de la tangente AA';

d) Que le centre de projection soit un point quelconque situé hors du plan osculateur ω au point A et hors du plan mené par A, parallèlement au plan de projection π.

6. Nous supposerons que le plan osculateur ω soit le plan du dessin et que AA' soit la tangente à la courbe au point A (fig. 7 à 54). Représentons le plan normal ν au point A et les intersections A'O et A'T du plan osculateur ω et d'un plan tangent quelconque τ, avec un plan π différent du plan osculateur et du plan tangent. Nous considérerons la courbe aux environs du point A et nous dessinerons chacune des deux branches qui se joignent au point A en un trait plein ou ponctué suivant que la branche considérée est en avant ou en arrière du plan osculateur.

7. I. Dans le cas où les trois plans ω, ν et τ traversent la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme dans les figures 7 et 8 et le point A ne porte pas de nom spécial; nous proposons de l'appeler *point ordinaire de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir que :

a) Si le point A est pris comme centre de projection, la projection A' du point A (fig. 9) est un *point de rebroussement de seconde espèce* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur (n° 3);

b) Si nous choisissons un centre de projection différent du point A sur la tangente AA', la projection A' du point A (fig. 10) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

Digitized by Google

c) Si nous choisissons un centre de projection en dehorsde la tangente AA', dans le plan osculateur, la projection A' du point A (fig. 11) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Si nous choisissons un centre de projection en dehorsdu plan osculateur ω et qui ne soit pas dans le plan mené par le point A, parallèlement au plan π, la projection A' du point A (fig. 12) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

8. II. Dans le cas où les plans ω et ν traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 13 et 14 et le point A porte le nom de *point ordinaire*; nous proposons de l'appeler *point ordinaire de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions choisies au numéro précédent et indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point ordinaire* (fig. 15), ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 16) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point d'inflexion* (fig. 17) ayant pour tangente, la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point ordinaire* (fig. 18) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

9. III. Dans le cas où les plans ν et τ traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 19 et 20 et le point A porte le nom de *point d'inflexion*; nous proposons de l'appeler *point d'inflexion de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig.21) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point ordinaire* (fig. 22) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point ordinaire* (fig. 23) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

Digitized by Google

d) Un *point d'inflexion* (fig. 24) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

10. IV. Dans le cas où les plans ω et τ traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera aux environs du point A comme dans les figures 25 et 26 et le point A porte le nom de *point de rebroussement*; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement ordinaire de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point d'inflexion* (fig. 27) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point d'inflexion* (fig. 28) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 29) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 30) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

11. V. Dans le cas où le plan ω traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 31 et 32, et le point A porte le nom de *point de rebroussement*; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement ordinaire de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 33) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 34) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 35) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 36) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

12. VI. Dans le cas où le plan normal ν traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme

Digitized by Google

l'indiquent les figures 37 et 38 et le point A ne porte pas de nom spécial; nous proposons de l'appeler *point d'inflexion de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point d'inflexion* (fig. 39) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

b) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 40) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

c) Un *point ordinaire* (fig. 41) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

d) Un *point ordinaire* (fig. 42) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

13. VII. Dans le cas où le plan tangent τ traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera aux environs du point A comme l'indiquent les figures 43 et 44, et le point A porte le nom de *point de rebroussement*; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement infléchi de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point ordinaire* (fig. 45) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

b) Un *point ordinaire* (fig. 46) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

c) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 47) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

d) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 48) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

14. VIII. Dans le cas où aucun des trois plans ω, ν et τ ne traverse la courbe, au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 49 et 50 et le point A porte le nom de *point de rebroussement;* nous proposons de l'appeler *point de rebroussement infléchi de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune

Digitized by Google

des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 51) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 52) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 53) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 54) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

15. Remarque I. On voit aisément, dans l'examen que nous venons de faire du point simple d'une courbe gauche, que si *un* plan tangent, différent du plan osculateur, traverse ou ne traverse pas la courbe en un point A, *tout* plan tangent, différent du plan osculateur, traverse ou ne traverse pas la courbe au point considéré.

16. Remarque II. Les résultats que nous avons obtenus, lorsque le centre de projection n'est pas au point A considéré sur la courbe, seront les mêmes, si, au lieu de projections polaires, on considère des projections cylindriques.

17. Remarque III. Pour bien montrer les résultats obtenus dans les numéros 7 à 15, nous les groupons dans un tableau, à la page suivante, et inscrivons, en caractères italiques, les noms que nous avons proposés pour compléter la technologie du point simple d'une courbe gauche (n° 18).

18. Technologie du point simple d'une courbe gauche. Nous avons vu que seuls, le *point ordinaire* (n° 8), le *point d'inflexion* (n° 9) et le *point de rebroussement* (n^{os} 10, 11, 13 et 14) portent un nom spécial, et encore le nom *point de rebroussement* convient à quatre points différents l'un de l'autre, mais ayant comme caractère commun, celui de correspondre à un plan normal ν ne traversant pas la courbe au point considéré.

Pour compléter la technologie relative au point simple d'une courbe gauche, classons d'abord les huit points trouvés en deux catégories, l'une caractérisée par ce fait que le plan normal ν *traverse* la courbe et comprenant les points 1, 2, 3, 6; l'autre caractérisée par ce fait que le plan normal ν *ne traverse pas* la courbe, et comprenant les points 4, 5, 7, 8,

Digitized by Google

Point simple d'une courbe gauche.

	Indication de ceux des plans ω, ν, τ qui traversent la courbe au point A.							
	1° ω, ν, τ	2° ω ν	3° ν τ	4° ω τ	5° ω	6° ν	7° τ	8° Aucun.
NOM DU POINT A DANS L'ESPACE. — *Les noms en caractères italiques sont ceux que nous proposons pour compléter la technologie du point simple d'une courbe gauche.* . .	POINT ORD. *de 1re esp.*	POINT ORD. *de 2de esp.*	POINT D'INFL. *de 1re espèce.*	POINT DE REB. *ord. de 1re esp.*	POINT DE REB. *ord. de 2de esp.*	POINT *d'inflexion de 2de esp.*	POINT DE REB. *infl. de 1re esp.*	POINT DE REB. *infl. de 2de esp.*
Nom du point A', projection du point A. — *a*] Le centre de projection est au point A	Point de rebr. de 2de espèce.	Point ordinaire.	Point de rebr. de 1re espèce.	Point d'inflexion	Point de rebr. de 1re espèce.	Point d'inflexion	Point ordinaire.	Point de rebr. de 2de espèce.
b] Le centre de projection est différent du point A, sur la tangente AA' . .	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	ordinaire.	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.	ordinaire.	de rebr. de 2de espèce.
c] Le centre de projection est dans le plan osculateur au point A, hors de la tangente AA' . . .	d'inflexion	d'inflexion	ordinaire.	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 1re espèce.	ordinaire.	de rebr. de 2de espèce.	de rebr. de 2de espèce.
d] Le centre de projection est hors du plan osculateur	d'inflexion	ordinaire.	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.	ordinaire.	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.

Digitized by Google

c'est-à-dire tous les points de rebroussement. Ensuite, dans chaque catégorie, qualifions de :

Point ordinaire, le point pour lequel le plan osculateur ω traverse la courbe;

Point d'inflexion, le point pour lequel le plan osculateur ω ne traverse pas la courbe ;

Point de première espèce, le point pour lequel le plan tangent τ traverse la courbe;

Point de seconde espèce, le point pour lequel le plan tangent τ ne traverse pas la courbe;

D'après cela, les points 1, 2, 3 et 6 de la première catégorie seront appelés respectivement, comme nous l'avons proposé :

Point ordinaire de première espèce (n° 7),

Point ordinaire de seconde espèce (n° 8),

Point d'inflexion de première espèce (n° 9),

Point d'inflexion de seconde espèce (n° 12);

et les points 4, 5, 7 et 8 de la seconde catégorie seront appelés respectivement, comme nous l'avons proposé :

Point de rebroussement ordinaire de première espèce (n° 10),

Point de rebroussement ordinaire de seconde espèce (n° 11),

Point de rebroussement infléchi de première espèce (n° 13),

Point de rebroussement infléchi de seconde espèce (n° 14).

19. DÉTERMINATION, DANS L'ESPACE, DU POINT SIMPLE D'UNE COURBE GAUCHE, CONNAISSANT DEUX PROJECTIONS DE CE POINT. — Nous avons examiné tous les cas qui peuvent se présenter pour un point simple d'une courbe gauche et dans chacun de ces cas nous avons considéré quatre projections. Si nous prenons les projections dans deux quelconques des quatre hypothèses que nous avons faites, on remarquera que pour chacun des huit points simples que l'on peut considérer dans l'espace, le groupe des deux projections choisies est essentiellement distinct de celui qu'on obtient pour chacun des autres points; nous pouvons donc, réciproquement, déterminer, sans ambiguïté, la qualité du point de l'espace, connaissant deux projections de ce point pour deux des quatre hypothèses considérées.

Ainsi par exemple, si nous prenons successivement le centre de projection au point A et en un point quelconque hors du plan osculateur au

Digitized by Google

point A, et que nous trouvions pour projection A′ du point A, *deux points ordinaires*, il est certain que le point A lui-même est un *point ordinaire* que nous avons appelé *point ordinaire de seconde espèce* (voir le tableau du n° 17).

20. Nous pensons qu'il serait utile d'établir une théorie analytique du point simple d'une courbe gauche, en prenant pour base la classification géométrique donnée dans cette note.

EXERCICES;

par M. E. N. Barisien (*Suite*, voir p. 153).

13. On considère une ellipse de centre O et un point M variable sur l'ellipse. La perpendiculaire élevée en O sur OM rencontre la tangente et la normale en M respectivement en T et en N.

1° Le lieu du point T est une kreuzcurve;

2° Le lieu du point N est une sextique;

3° Soient E l'aire de l'ellipse, U l'aire de la kreuzcurve comprise entre la courbe et ses asymptotes, U′ l'aire de la sextique. On a la relation

$$2UU' = E^2.$$

14. Soient M un point variable d'une ellipse donnée, M′ le point diamétralement opposé à M, N la projection de M′ sur la tangente en M et Q la projection de N sur MM′. Les aires des courbes, lieux des points N et Q, ont pour expressions

$$\pi ab + \frac{4\pi ab\,(a-b)}{a+b}, \quad \pi ab - \frac{4\pi a^2b^2\,(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^3}.$$

Soient ε, η, σ les aires de l'ellipse donnée, de la courbe (N) et de la podaire (P) du centre O de l'ellipse, P étant la projection de O sur MN. Les droites MN, MP en roulant sur l'ellipse engendrent des aires quadruples l'une de l'autre. On en conclut

$$\eta - \varepsilon = 4(\sigma - \varepsilon), \text{ d'où } \eta = 4\sigma - 3\varepsilon = \pi ab + 2\pi(a-b)^2,$$

résultat différent de celui de M. Barisien. (J. N.)

15. On considère une ellipse E de demi-axes a et b, et le cercle C concentrique à E, de rayon $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. D'un point quelconque M de C on mène les tangentes à E qui touchent E en P et Q. On projette le

Digitized by Google

centre O de E en H sur PQ, et le point M en I sur PQ. Montrer que les courbes lieux des points I et H ont même aire

$$\frac{\pi(a^4+b^4)}{4(a^2+b^2)}.$$

La corde PQ touche son enveloppe au milieu N du segment HI. Cette propriété suffit pour établir que les points H et I engendrent des aires égales. L'expression de ces aires s'obtient en ajoutant à l'aire de l'ellipse engendrée par le point N celle d'une courbe dont le rayon vecteur (émanant d'un point fixe) est égal et parallèle à la droite NH. Appelons ω l'inclinaison de PQ sur Ox, et α l'angle de OM avec PQ; la dernière aire s'exprime par $\frac{1}{8}\int \overline{OM}^2 \cos^2\alpha d\omega$. (J. N.)

16. On considère une ellipse E de centre O, et une ellipse E_1, concentrique et homothétique à E, E_1 étant extérieure à E. D'un point M quelconque situé sur E_1, on mène à E les deux tangentes dont les points de contact sont P et Q. Soient H et I les projections des points O et M sur PQ. Montrer que les aires des courbes lieu de H et lieu de I ne sont équivalentes que si le rapport d'homothétie entre les ellipses E_1 et E, est égal à $\sqrt{2}$.

La droite PQ touche son enveloppe en son milieu N ; les aires engendrées par les segments NH et NI sont proportionnelles aux carrés des longueurs NH et NI; pour avoir HN = NI, le rapport d'homothétie de E_1 et E doit être égal à $\sqrt{2}$.

On pourrait aussi projeter E et E_1 suivant deux circonférences, etc. (J. N.)

17. On donne une parabole P et une ellipse E ayant son centre au sommet de P et même direction d'axes que P. — D'un point quelconque M de E on abaisse les normales sur P dont les pieds sont A, B, C. 1° Le lieu du centre de gravité du triangle formé par les centres de courbure de A, B, C est une ellipse E'. 2° Quel doit être le rapport des axes de l'ellipse E pour que l'ellipse E' soit un cercle.

18. Trouver la courbe enveloppe des paraboles qui sont circonscrites à une série de trapèzes, isoscèles tels que 1° les milieux des bases soient fixes; 2° la somme des bases soit constante.

Traiter la même question lorsque : 1° la différence des bases est constante; 2° le produit des bases est constant.

On trouve une ellipse.

19. On considère un cercle fixe et l'une de ses tangentes fixe. On prend sur cette tangente deux points variables B et C tels que BC soit

Digitized by Google

égale au rayon du cercle. Les secondes tangentes menées de B et C au cercle se rencontrent en A. Montrer que

1° Le lieu du point A est une ellipse;

2° Tous les triangles ABC jouissent de la propriété suivante : La somme (ou différence) de BC et de la hauteur issue de A est égale à la somme (ou différence) des côtés AB et AC.

3° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle ABC se compose d'une parabole et de deux cubiques.

4° Généraliser la question en prenant B et C tels que BC soit égale à une longueur constante quelconque.

20. Soient M et N deux points fixes situés sur une conique Σ de centre O, P et Q deux points situés sur un axe de Σ, à égale distance de O, T le point de rencontre de la corde MN avec l'axe considéré. On construit une conique Σ' passant par les points M, N, P et Q; elle rencontre Σ en deux autres points R et S. Montrer que, lorsque la distance PQ varie, la droite RS passe par le point fixe T′ symétrique du point T par rapport à O.

21. En chaque point M d'une ellipse donnée, on considère le centre C du cercle osculateur en M à l'ellipse, et le second point de rencontre P de ce cercle avec l'ellipse.

1° Etudier la variation de l'aire du triangle MPC lorsque le point M parcourt l'ellipse.

2° Montrer que le lieu du centre de gravité du triangle MPC est une courbe dont l'aire est une fonction linéaire des aires de l'ellipse et de sa développée.

3° Voir ce que devient la question précédente si on remplace l'ellipse par une parabole.

22. On considère tous les triangles ABC tels que le côté BC soit fixe et que la hauteur issue de A soit égale à la différence des côtés AB et AC.

Trouver 1° Le lieu du point A; 2° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle ABC; 3° Le lieu des points de contact de ces cercles avec les côtés AB et AC.

23. On considère une parabole P et deux droites Δ et Δ' parallèle à l'axe et équidistantes de cet axe. D'un point Q quelconque de Δ on mène les tangentes à P dont les points de contact sont M et M′. Le cercle circonscrit au triangle QMM′ rencontre P en deux autres points M_1 et M'_1.

Digitized by Google

1° Le lieu des points de rencontre des sécantes communes au cercle et à la parabole se compose de la directrice de P et d'une cubique.

2° Le lieu des pôles des sécantes communes, par rapport à la parabole, se compose des droites Δ et Δ′ et d'une quartique.

3° Examiner le cas où l'écartement des droites Δ et Δ′ est égal à quatre fois la distance du sommet de P à son foyer.

24. Démontrer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)}.$$

25. Démontrer l'intégrale

$$\int_0^b \frac{x^5 dx}{\sqrt{(a^2-b^2)x^2+b^4}} = \frac{b^5(a+2b)}{3(a+b)^2}.$$

(*A continuer*).

ENCORE UNE DÉMONSTRATION DU POSTULATUM D'EUCLIDE (*).

1. *Théorèmes de* LEGENDRE *et de* LAMBERT. « Nous avons prouvé d'une manière rigoureuse, dit Legendre dans la note II de la 12e édition de ses *Éléments de Géométrie*, que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits, proposition qui sépare tout d'un coup, par une différence essentielle, les triangles rectilignes des triangles sphériques(**). »

Il en résulte, comme corollaire, que dans un polygone de p côtés, la somme des angles ne peut surpasser $2(p-2)$ droits.

« Cette première partie établie, continue Legendre, il restait à prouver que la somme des angles ne peut être plus petite que deux angles droits; or, comme l'excès des trois angles sur deux angles droits qui a lieu dans les triangles sphériques, est proportionnel à l'aire du triangle; de même, *le* DÉFICIT, *s'il y en avait un dans les triangles rectilignes, serait proportionnel à l'aire du triangle.* »

(*) Nous supposons admis dans cette note que *deux droites ne peuvent enclore un espace* (Postulat des deux droites, ou postulat VI d'Euclide).

(**) Legendre a aussi prouvé que si la somme des angles est égale à deux droits dans un seul triangle, il en est ainsi dans tous et qu'alors on peut établir le postulatum d'Euclide.

Digitized by Google

Par suite, l'aire d'un polygone de p côtés serait aussi proportionnelle à son déficit, c'est-à-dire à ce qui manque à la somme de ses angles pour être égale à $2(p-2)$ droits.

Ce curieux *théorème du déficit*, qui est dû à Lambert, est assez facile à démontrer dans sa partie essentielle, que l'on peut énoncer comme il suit : « *le déficit d'un polygone qui est une partie d'un autre polygone est une partie du déficit de celui-ci.* »

Le théorème du déficit, sous cette dernière forme, est très utile pour découvrir le défaut caché de certains essais de démonstration du postulatum, comme nous allons le montrer, d'abord sur un exemple, puis d'une manière générale.

2. *Nouvel essai de démonstration.* Considérons n triangles équilatéraux égaux AA_1C_1, $A_1A_2C_2\ldots$, $A_{n-1}BC_n$, situés d'un même côté de la droite AB, sur laquelle se trouvent leurs bases AA_1, A_1A_2, ..., A_nB. Aux points A, B, élevons sur AB les perpendiculaires(*) $AD = BC$ et joignons CD.

Soient 2 droits $-\alpha$, la somme des angles de chacun de ces triangles équilatéraux, β la somme des angles C et D du quadrilatère ABCD.

On trouve aisément les valeurs suivantes pour les angles du polygone $AC_1A_1C_2A_2\ldots C_nBCD$:

$$\text{angle } DAC_1 = \text{angle } C_nBC = 1 \text{ droit} - \tfrac{1}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = \tfrac{4}{3} \text{ dr.} + \tfrac{1}{3}\alpha$$

$$\text{angle } C_1A_1C_2 = \text{angle } C_2A_2C_3 = \ldots = C_{n-1}A_{n-1}C_n =$$
$$2 \text{ droits} - \tfrac{2}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = \tfrac{2}{3} \text{ dr.} + \tfrac{2}{3}\alpha$$

$$\text{angles convexes en } C_1, C_2, \ldots C_n = 4 \text{ droits} - \tfrac{4}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = 3\tfrac{4}{3} \text{ dr.} + \tfrac{4}{3}\alpha$$

$$\text{angle C} = \text{angle D} = \tfrac{1}{2}\beta.$$

Par suite, la somme S de tous les angles de ce polygone est

$$n(\tfrac{2}{3} \text{ dr.} + \tfrac{2}{3}\alpha) + n(3\tfrac{4}{3} \text{ dr.} + \tfrac{4}{3}\alpha) + \beta = 4n \text{ dr.} + n\alpha + \beta.$$

On peut écrire

$$S = 2(2n+1) \text{ droits} + (n\alpha - 2 \text{ droits}) + \beta.$$

Si α n'est pas nul, on peut prendre n assez grand pour que $n\alpha$ égale ou surpasse deux droits; alors on aura $S > 2(2n+1)$ droits, ce qui est

(*) On peut aussi prolonger AC_1 d'une longueur C_1D suffisante, puis faire en B, un angle ABC supplément de DAB et prendre $BC = AD$. On peut d'ailleurs remplacer le triangle équilatéral par un triangle quelconque.

Digitized by Google

contraire au corollaire du théorème de Legendre cité plus haut. On doit supposer $\alpha = 0$, ce qui, comme on le sait, équivaut au postulatum d'Euclide.

3. ***Défaut de cette démonstration.*** La démonstration précédente, dont nous avons emprunté l'idée fondamentale à une brochure récente, suppose implicitement que la figure $AC_1A_1C_2A_2 \ldots C_{n-1}BCD$ soit un polygone, c'est-à-dire que la ligne CD ne coupe pas la ligne brisée $AC_1A_1C_2A_2 \ldots B$. Or, si n est assez grand pour que S surpasse ou égale $2(2n+1)$ droits, ou que l'on ait

$$n\alpha \geqq 2 \text{ droits} - \beta, \qquad (1)$$

CD coupe cette ligne brisée. En effet, $n\alpha$ est le déficit de l'ensemble des triangles équilatéraux AC_1A_1, $A_1C_2A_2$, ... $A_{n-1}C_nB$; 2 droits $- \beta$ est celui du quadrilatère ABCD. Donc, d'après le *principe du déficit*, il résulte de la relation (1) que l'aire des triangles équilatéraux est égale ou supérieure à celle du quadrilatère ABCD; par suite, ces triangles ne peuvent se trouver complètement à l'intérieur du quadrilatère ABCD; le côté BC rencontre donc la ligne brisée $AC_1A_1C_2A_2 \ldots B$, et la conclusion de la fin du n° 2 n'est pas établie.

4. ***Théorème général.*** Considérons deux polygones $M = AP_1P_2 \ldots P_pBQ_1Q_2 \ldots Q_qA$, $N = AP_1P_2 \ldots P_pBR_1R_2 \ldots R_rA$, situés d'un même côté de la partie commune $AP_1P_2 \ldots P_pB$ de leur périmètre et ayant respectivement $(p+q+2)$ et $(p+r+2)$ côtés. Dans ces polygones, appelons P, Q, R la somme des angles en $P_1, \ldots, P_p$, en $Q_1, \ldots, Q_q$, en $R_1, \ldots, R_r$; α, β les angles en A et B de M, α', β' les angles en A, B de N, Δ le déficit de M, Δ' le déficit de N. On aura

$$P + Q + \alpha + \beta + \Delta = 2(p+q) \text{ droits},$$
$$P + R + \alpha' + \beta' + \Delta' = 2(p+r) \text{ droits},$$

et, par suite,

$$R - Q + \alpha' - \alpha + \beta' - \beta + \Delta' - \Delta = 2(r-q) \text{ droits}. \qquad (2)$$

Cherchons la somme S' des angles de la *figure* $AQ_q \ldots Q_1BR_1 \ldots R_rA$, en supposant, pour fixer les idées que les côtés AQ_q, BQ_1 soient à l'intérieur du polygone N. Nous trouverons

$$S' = \alpha' - \alpha + R + \beta' - \beta + q.4 \text{ droits} - Q,$$

ou, d'après (2),

$$S' = 2(q+r) \text{ droits} - (\Delta' - \Delta).$$

Digitized by Google

Si la ligne $AQ_r \ldots Q_1B$ est à l'intérieur du polygone N, cette relation exprime simplement que le déficit

$$\Delta'' = 2(q + r) \text{ droits} - S'$$

du polygone

$$L = AQ_q \ldots Q_1BR_1 \ldots R_rA,$$

différence des polygones N et M, est égal à la différence $\Delta' - \Delta$ des déficit de ces polygones, c'est-à-dire la partie essentielle du théorème de Lambert.

Si Δ est supérieur ou égal à Δ', d'après ce théorème de Lambert, M a une aire supérieure à N; donc la ligne $AQ_q \ldots Q_1B$ ne peut être toute entière à l'intérieur de N : elle coupe au moins une fois $AR_r \ldots R_1B$, entre A et B et la figure $AQ_q \ldots Q_1BR_1 \ldots R_rA$ n'est pas un polygone proprement dit. La somme S' de ses angles est supérieure ou égale à $2(q + r)$ droits; mais cela n'est pas en contradiction avec le corollaire du théorème de Legendre et, par suite, on ne peut rien en conclure touchant le postulatum d'Euclide. (P. M).

NOTES MATHÉMATIQUES.

15. *Sur la question* 1115 (*Mathesis*, (2) VII, p. 276). Pour trouver le lieu du foyer F d'une parabole variable π, qui touche une droite donnée AB en un point donné A et dont l'axe passe par un point donné P, on peut se servir des coordonnées polaires. En effet, A étant le pôle et AB l'axe polaire, posons $AF = \rho$, angle $FAB = \omega$, angle $PAB = \theta$, $AP = d$. Le triangle formé par FA et par l'axe avec AB étant isoscèle, l'angle $AFB = 2\omega$ (on suppose AF entre AB et AP), et le triangle AFP donne

$$\rho : d = \sin(\theta + \omega) : \sin 2\omega;$$

d'où l'équation en coordonnées rectilignes :

$$2xy = d(x \sin\theta + y \cos\theta).$$

(A. C.)

16. *Sur le lieu des sommets des courbes du second ordre*, par M. Barbette, professeur à Liége. Supposons les axes rectangulaires et considérons l'équation générale des coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Digitized by Google

Une conique satisfaisant à quatre conditions est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad (2)$$

où λ est un paramètre variable.

Pour déterminer le lieu des sommets de cette conique, on sait qu'il suffit d'éliminer λ entre son équation (dont nous désignons les coefficients par A, B, C, D, E, F) et la relation

$$(A - C) f'_x(x, y, \lambda) f'_y(x, y, \lambda) = B [f'^2_x(x, y, \lambda) - f'^2_y(x, y, \lambda)].$$

Or, cette élimination est souvent très difficile ; c'est pourquoi la méthode que nous allons exposer semble préférable.

L'équation focale étant

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + t)^2,$$

soit $f(\alpha, \beta) = 0$ l'équation du lieu des foyers des coniques satisfaisant à quatre conditions données, les paramètres m, n et t ayant été exprimés en fonction de α et β.

Les coordonnées du point d'intersection D de la directrice,

$$mx + ny + t = 0,$$

et de la perpendiculaire abaissée sur cette directrice du foyer correspondant F (α, β),

$$y - \beta = \frac{n}{m}(x - \alpha),$$

sont

$$\frac{n^2\alpha - mn\beta - mt}{l^2}, \quad \frac{m^2\beta - nm\alpha - nt}{l^2},$$

en posant $l^2 = m^2 + n^2$.

Or le sommet (x, y) partage la distance FD du foyer à la directrice dans le rapport e, et ainsi les génératrices de ce sommet ont pour équations

$$x = \frac{\alpha e^2 + n^2\alpha - mn\beta - mt}{e^2(e + 1)}, \quad y = \frac{\beta e^2 + m^2\beta - nm\alpha - nt}{e^2(e + 1)}.$$

Si nous éliminons α et β entre $f(\alpha, \beta) = 0$ et ces deux dernières équations, nous aurons une relation $\varphi(x, y) = 0$ qui représentera le lieu des sommets.

Remarques I. La transformation

$$\alpha = \rho \cos \omega, \quad \beta = \rho \sin \omega,$$

simplifie souvent la recherche du lieu.

Digitized by Google

II. Si l'on donne une directrice et qu'on la prenne pour axe des y, les équations des génératrices d'un sommet sont

$$x = \frac{\alpha e}{e+1}, \qquad y = \frac{\beta(e^2+m^2)}{e^2(e+1)}.$$

Si, de plus, la conique est une parabole, ces dernières équations deviennent $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \beta$, le lieu des sommets sera $f(2x, y) = 0$.

17. *Sur la figure du carré de l'hypoténuse.* Soient M, N, P les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle rectangle en A. On a les propriétés suivantes dont quelques-unes s'appliquent aussi à un triangle quelconque ABC :

1° Les droites AM, BN, CP sont les hauteurs du triangle MNP.

2° Les triangles ABC, MNP ont le même centre de gravité.

3° L'aire MNP = BPNC = $\frac{1}{4}(b+c)^2$ = ABMC.

4° Les distances de l'orthocentre du triangle MNP aux droites AB et AC sont égales à $\frac{1}{2}\frac{bc}{b+c}$.

5° En prenant pour axes coordonnés AB et AC, on a pour équation de l'axe d'homologie des triangles ABC et MNP,

$$c^2x + b^2y - bc(b+c) = 0.$$

6° Les points de rencontre de MN avec AC et BC, et ceux de MP avec BA et BC sont sur une conique touchant NP en A ; cette courbe a pour équation

$$(2c+b)bx^2 + (2b+c)cy^2 - bcxy + bc(b+c)(x+y) = 0.$$

(Zahradnik, *Archives de Grunert*, (2), XIV, p. 105).

18. *Projection oblique d'une aire plane.* Étant donnés deux plans α, β et une droite p, soit S_α une aire quelconque prise dans le plan α et soit S_β la projection de S_α sur le plan β, les projetantes étant parallèles à p. Le rapport $S_\alpha : S_\beta$ est constant.

Pour démontrer cette proposition, appelons S_π la section droite du cylindre projetant S_α sur S_β ; c'est à la fois la projection orthogonale de S_α et de S_β sur un plan π perpendiculaire à p. Par conséquent

$$S_\pi = S_\alpha \cos(\alpha, \pi), \quad S_\pi = S_\beta \cos(\beta, \pi),$$

d'où

$$S_\beta = S_\alpha \frac{\cos(\alpha, \pi)}{\cos(\beta, \pi)}.$$

Digitized by Google

On peut aussi imiter la démonstration que l'on donne dans le cas d'une projection orthogonale. A cet effet, considérons d'abord un triangle $A_\alpha BC$ dont la base BC est située sur l'intersection d des plans α, β; si A_β est la projection de A_α sur B, la projetante étant parallèle à p, les triangles $A_\beta BC$, $A_\alpha BC$ sont entre eux comme les perpendiculaires abaissées des points A_β et A_α sur d. Mais le rapport de ces perpendiculaires ne change pas avec le point A_α dans le plan α; car si M_α et M_β sont deux nouvelles positions de A_α et A_β, les droites $A_\alpha M_\alpha$ et $A_\beta M_\beta$ se coupent en un point N de d, et l'on a

$$\frac{(A_\alpha, d)}{(M_\alpha, d)} = \frac{A_\alpha N}{M_\alpha N} = \frac{A_\beta N}{M_\beta N} = \frac{(A_\beta, d)}{(M_\beta, d)}.$$

Considérons ensuite un triangle quelconque $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ situé dans le plan α, et soit $A_\beta B_\beta C_\beta$ sa projection oblique sur le plan β; les côtés homologues de ces triangles se coupent en des points M, N, P de d. Le triangle $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ est la somme (algébrique) des triangles ANP, BMN, CPM, etc.

De l'aire d'un triangle, on passe à celle d'un polygone, puis à l'aire limitée par un contour courbe.

19. *Lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné* ABCD. Soient M, N, P, Q les points de contact des côtés AB, BC, CD DA avec une conique inscrite, de centre O. La droite OB passe par le milieu de la corde MN; on en conclut que les triangles MOB, NOB sont équivalents. De même les triangles NOC et POC, POD et QOD, QOA et MOA sont équivalents. Il en résulte que la somme des triangles OAB et OCD, égale à celle des triangles OBC et ODA, vaut la moitié du quadrilatère ABCD. Cela posé, si l'on prend à partir du point d'intersection E des droites AB, DC sur EB une longueur EF = AB, sur EC une longueur EG = DC, la somme des triangles OEF, OEG sera égale à $\frac{1}{2}$ ABCD; par suite, le triangle OFG a une surface constante, et le lieu du point O est une droite parallèle à FG. Mais les milieux des diagonales AC, BD satisfont à la condition OAB + OCD = $\frac{1}{2}$ ABCD; donc le lieu cherché est la droite qui unit les milieux des diagonales du quadrilatère donné.

Cette démonstration, que nous empruntons à l'*Educationa Times* (juillet 1898), est peut être connue depuis longtemps; du moins, dans

Digitized by Google

les premières années des N. A. M., on démontre par ce moyen que le centre du cercle inscrit à un quadrilatère est sur la droite joignant les milieux des diagonales.

BIBLIOGRAPHIE.

Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. Zeuthen, Professor an der Universität Kopenhagen. Kopenhagen, Verlag von Andr. Fred. Höst u. Sön. 1896 (VII-344 p. petit in-8°). Prix : 7 marcs.

L'histoire des Mathématiques constitue en Danemark (comme en Belgique, depuis 1834) l'une des matières de l'examen que doivent subir les aspirants-professeurs dans les gymnases ou collèges. M. Zeuthen, à qui l'on doit une magistrale étude sur la *Théorie des coniques dans l'antiquité* et des *Notes sur l'histoire des mathématiques* qui, sur plusieurs points importants, rectifient ou transforment complètement les idées courantes, a publié, en 1893, un manuel excellent, malheureusement inaccessible à la plupart des lecteurs, parce qu'il est écrit en danois. Mais, dès 1896, il a été mis à la portée du grand public, par M. Fischer-Benzon, qui en a donné une traduction allemande, où l'auteur a d'ailleurs introduit les résultats des recherches historiques les plus récentes, particulièrement celles de M. P. Tannery.

Ce dernier savant, dont on connait la haute compétence, dit à propos de ce manuel de M. Zeuthen : « A côté d'un grand ouvrage historique comme celui de Moritz Cantor, le besoin d'un bon abrégé se faisait sentir, comme le prouvent les essais » (Gow, Ball, Cajori) « récemment tentés en Angleterre et aux États-Unis. Je n'hésite pas à signaler le travail de M. Zeuthen comme très supérieur à ces essais; non seulement il donne avec exactitude tout ce qu'il est essentiel de savoir, mais il s'attache à mettre en pleine lumière le caractère des méthodes et leur développement. Il est ainsi parvenu à éclairer d'un jour tout nouveau un certain nombre de questions obscures, qui à mon avis, sont précisément celles dont l'intérêt est le plus considérable ». Sans doute, comme le remarque M. Cantor, en essayant surtout de retrouver la genèse des méthodes de l'antiquité, M. Zeuthen a dû parfois, inconsciemment sans doute, moderniser les géomètres grecs; mais pour l'étudiant qui se sert de son livre comme manuel, le moindre contact avec Euclide, Archimède ou Apollonius, remettra les choses au point et lui permettra de se familiariser avec la forme antique de l'exposition mathématique.

Tandis que le grand ouvrage de Cantor est un tableau aussi complet que possible de l'histoire des Mathématiques, dans tous ses détails, jusque 1758, le manuel de Zeuthen est un exposé rapide des principaux progrès de la science avant l'époque moderne. C'est ce qui explique l'importance accordée aux grands géomètres grecs : Euclide, Archimède, Apollonius et Diophante et la façon sommaire dont il est parlé des Egyptiens, des Babyloniens, des Indous et des Arabes.

Voici au reste quelles sont les matières traitées dans les 39 chapitres dont se

Digitized by Google

compose l'ouvrage. *Introduction* I. Les mathématiques avant la naissance de la science. 2. Egyptiens et Babyloniens. *Les mathématiques grecques.* 1. Aperçu général. 2. Les mathématiques pythagoriciennes. 3. L'arithmétique géométrique. 4. L'algèbre géométrique. 5. Equations numériques du second degré; extraction de la racine carrée. 6. L'infini. 7. La quadrature du cercle. 8. La trisection de l'angle; solutions mécaniques. 9. Duplication du cube. 10. Problèmes et théorèmes; signification de la construction géométrique. 11. La méthode analytique; forme d'exposition analytico-synthétique. 12. Des éléments; auxiliaires analytiques. 13. Aperçu sur les éléments d'Euclide; système synthétique. 14-15. Définitions, postulats, axiomes d'Euclide; remarques. 16. La théorie générale des proportions; les livres 5 et 6 d'Euclide. 17. Les grandeurs commensurables; leur représentation par des nombres : les livres 7, 8, 9 d'Euclide. 18. Les grandeurs incommensurables; le livre 10 d'Euclide. 19. Les éléments de la stéréométrie; polyèdres réguliers; les livres 11 et 13 d'Euclide. 20. La méthode d'exhaustion : le livre 12 d'Euclide. 21. Les recherches infinitésimales d'Archimède. 22. La théorie de l'équilibre d'Archimède. 23. La théorie des coniques avant Apollonius. 24. Les coniques chez Apollonius. 25. Lieux et problèmes solides. 26. Le calcul en géométrie. 27. La géométrie sphérique. 28. La décadence de la géométrie grecque. 29. L'arithmétique après Euclide; Diophante. *Les mathématiques chez les Indous.* 1. Aperçu général. 2. Numération parlée, numération écrite, calcul numérique avant les Indous et chez les Indous. 3. Applications du calcul numérique. 4. Algèbre et théorie des nombres; géométrie. *Le moyen-âge.* 1. Introduction générale. 2. Arithmétique et algèbre des Arabes. 3. Trigonométrie des Arabes. 4. Première renaissance des mathématiques en Europe.

L'ouvrage de M. Zeuthen ne contient que très peu de renseignements biographiques et bibliographiques. Comme le remarque M. Eneström, il existe heureusement un petit livre qui en est pour ainsi dire le complément indispensable sous ce rapport, savoir les *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre* 1500, *mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* von F. Müller (Leipzig, Teubner, 1892), que nous avons annoncées autrefois dans *Mathesis*, (2), III, pp. 66. (P. M.)

Gino Loria, Professore ordinario dell'Università di Genova. **Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.** Secunda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino, Carle Clausen, 1896 (In-8° de XX-346 pages). Prix : 8 francs.

La première édition de cette admirable monographie historico-bibliographique a paru en 1887; une traduction allemande et une traduction polonaise avec des additions, quelques années après. La présente édition considérablemsnt augmentée est donc, en réalité, la quatrième. Elle comprend douze chapitres. 1. La géométrie jusque vers 1850. 2. Théorie des courbes planes algébriques. 3. Théorie des surfaces algébriques. 4. Théorie des courbes algébriques à double courbure. 5. Géométrie différentielle. 6. Recherches sur la forme des courbes, des surfaces et des

Digitized by Google

autres figures géométriques. Analysis situs. Configurations. 7. Géométrie plückérienne de la droite dans l'espace. 8. Correspondances, représentations, transformations. 9. Géométrie énumérative. 10-11. Géométrie non euclidienne ou à n dimensions. 12. Epilogue (coordonnées projectives; projection centrale; notations symboliques pour les formes algébriques; invariants différentiels; géométrie cinématique; moments d'inertie; π; constructions par la règle et le compas; équipollences, quaternions, méthode de Grassmann; géométrie récente du triangle).

Autant que nous avons pu en juger par l'examen du chapitre 10, cette *carte détaillée du pays géométrique* est très complète et très-exacte et est indispensable, comme le célèbre *Rapport* de Chasles *sur les Progrès de la Géométrie*, à ceux qui veulent faire des voyages de découverte dans les régions encore inexplorées ou peu connues de ce vaste domaine. (P. M.)

Cours de problèmes de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'École navale, à l'École centrale et à l'École polytechnique par G. DE LONGCHAMPS, ancien professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, censeur des études au Lycée Charlemagne. Tome II. Paris, Delagrave. In-8° de 435 pages, 106 figures.

Table des matières. Chap. IX. Le problème des normales (le pôle normal), p. 1-50. 28 exercices. — Chap. X. Le problème des cordes (l'équation en λ), p. 51-98. 40 exercices. — Chap. XI. Les problèmes à relations métriques, p. 99-166. 62 exercices. — Chap. XII. Les coniques et la forme normale, p. 167-198. 13 exercices. — Chap. XIII. Les problèmes de foyers. Les problèmes de sommets. (Les axes et les directrices), p. 199-236. 32 exercices. Chap. XIV. Les problèmes de simple contact, p. 237-262. 9 exercices. — Chap. XV. Les problèmes de contact supérieur, p. 263-286. 18 exercices. — Chap. XVI. Coniques inscrites et circonscrites. Coniques conjuguées, p. 287-327. 26 exercices. — Chap. XVII. 1re partie, coordonnées barycentriques, p. 327-338; 2e partie, coordonnées tangentielles, p. 339-379. 69 exercices. — Chap. XVIII. Les transformations et les problèmes de la géométrie analytique, p. 380-435. 36 exercices.

Comme nous l'avons déjà dit en annonçant le tome I de cet ouvrage, le Cours de problèmes de M. de Longchamps se distingue des autres recueils de problèmes de géométrie analytique : chaque chapitre résume les conseils à donner sur un genre spécial de questions, traite ensuite *in extenso* plusieurs de ces questions, puis indique en abrégé les solutions d'un grand nombre d'exercices, originaux et même différents de ceux que l'auteur a proposés dans diverses publications mathématiques.

Partout, dans les deux volumes déjà parus du *Cours de problèmes*, on constate que M. de Longchamps, dans sa longue carrière professorale, a porté tous ses efforts à contribuer au développement de la science et aux progrès de l'enseignement. Le livre est très *excitateur* : l'intérêt n'y languit jamais et l'on y trouve une foule d'idées nouvelles propres à fournir au lecteur la matière de recherches personnelles. (J. N.).

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1063.

(Voir *Mathesis*, (2) tome VI, p. 80).

On donne trois droites parallèles AA′, BB′, CC′ *non situées dans un même plan. Les plans* A′BC, B′CA, C′AB *se coupent en un point* S; *les plans* AB′C′, BC′A′, CA′B′, *en un point* S′. *Démontrer que la droite* SS′ *est parallèle à* AA′, *et coupe les plans* ABC, A′B′C′ *en des points* T *et* T′ *tels que* TS = SS′ = S′T′; *que la droite* TT′ *est une moyenne harmonique entre* AA′, BB′, CC′. (J. N.)

Solution par MM. Colart (Huy), Soons (Tirlemont), Francq (Charleroi) et Droz Farny. Soient A_1, B_1, C_1, les intersections des droites BC′ et B′C, AC′ et A′C, AB′ et A′B. Le point S sera l'intersection commune des droites AA_1, BB_1, CC_1, et le point S′ sera l'intersection commune des droites A_1A', B_1B', C_1C'.

La droite SS′ étant l'intersection des plans AA_1A', BB_1B', CC_1C' passant par les trois droites parallèles AA′, BB′, CC′, sera parallèle à ces droites.

Soient A_2, A'_2 les points où les droites BC, B′C′ coupent la parallèle menée par A_1 à BB′ : les points T, T′ seront les intersections respectives de SS′ avec AA_2 et $A'A'_2$. La droite A_2A' passe par le point S. Par suite, dans le trapèze $AA'A_1A_2$, on a SS′ = TS. De même, la droite AA'_2 passe par le point S′ et l'on a SS′ = T′S′.

Enfin, dans les trapèzes $AA'A_1A_2$, BCC′B′, on a

$$\frac{1}{TS'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'}+\frac{1}{A_1A_2}\right),\quad \frac{1}{A_2A'_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{CC'}+\frac{1}{BB'}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{TT'}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}\right).$$

Note. Comme on a

$$B'A_1 : A_1C = B'B : C'C,\quad B'C_1 : C_1A = B'B : AA',$$

le point d'intersection S des droites AA_1 et CC_1 est le centre de gravité des points A, B_1, C chargés des poids $\frac{1}{AA'}$, $\frac{1}{BB'}$, $\frac{1}{CC'}$. Par suite, le point T est le centre de gravité des mêmes poids attachés en A, B, C. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 1067.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 104).

Parmi tous les triangles rectangles ABC *de même hypoténuse* BC, *quel est celui dans lequel le produit du côté* AB *par la bissectrice de l'angle opposé* C *est un maximum?* (Brierley).

Solutions par MM. Colart, Degueldre, Droz Farny, V. Maes, Brien, Francq et Deprez. Si CD est la bissectrice de l'angle C, on trouve

$$AB.DC = 2a^2 \sin\frac{C}{2} \cos C = a^2 \sqrt{2(1 - \cos C)\cos^2 C}.$$

Le maximum du radical a lieu pour

$$1 - \cos C = \frac{\cos C}{2}, \quad \text{d'où} \quad \cos C = \frac{2}{3}, \; C = 48°12'23''.$$

Par suite, $AC = \frac{2}{3}BC$.

MM. Barisien et Strymeersch égalent à zéro la dérivée de $\sin\frac{C}{2}\cos C$.

M. Strymeersch donne une seconde solution en partant de la relation :

$$\overline{AB}^2.\overline{DC}^2 = 2ab^3(a - b),$$

et en posant $\frac{b}{2} = \frac{a-b}{1}$, d'où $b = \frac{2}{3}a$.

×Question 1068.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 128).

Par trois droites données a, b, c non situées dans un même plan, mener trois plans formant un trièdre trirectangle. (J. Neuberg.)

Solution par MM. Jeřábek *et* Brien. Soit c' une droite parallèle à c et s'appuyant sur a en A et sur b en B. Si l'on connaissait un point O' tel que les plans O'a, O'b, O'c' fussent rectangulaires deux à deux, il suffirait de mener par c un plan γ parallèle au plan O'c', et les trois plans O'a, O'b, γ satisferaient à la question.

Soit D la projection de O' sur le plan ac'; le plan DO'B, à la fois perpendiculaire aux plans O'a et ac', est perpendiculaire à la droite a, et s'il rencontre a au point B', l'angle BO'B' est droit. Donc O' se trouve

Digitized by Google

sur la circonférence de diamètre BB', dont le plan est perpendiculaire à a. Il se trouve aussi sur la circonférence de diamètre AA', dont le plan est perpendiculaire à b, A' désignant la projection de A sur b. On peut donc le déterminer au moyen de l'une de ces circonférences et de la droite suivant laquelle se coupent les plans des deux cercles.

×Question 1073.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 142).

Trouver la condition pour que le système

$$x^2=a(x+y)(x+z),\quad y^2=b(y+z)(y+x),\quad z^2=c(z+x)(z+y)$$

admette une solution non nulle. (J. N.)

Première solution par MM. Déprez et Mandart. Retranchons la seconde équation de la première, puis la troisième de la première; il vient

$$x^2-y^2=(x+y)[a(x+z)-b(y+z)],$$
$$x^2-z^2=(x+z)[a(x+y)-c(y+z)],$$

ou, si l'on tient compte de l'énoncé,

$$x-y=a(x+z)-b(y+z),\quad x-z=a(x+y)-c(y+z),$$

ou encore,

$$x(a-1)+y(1-b)+z(a-b)=0,$$
$$x(a-1)+y(a-c)+z(1-c)=0.$$

D'où les rapports égaux :

$$\frac{x}{1+a-b-c}=\frac{y}{1+b-a-c}=\frac{z}{1+c-a-b}.$$

Remplaçons x, y, z par les conséquents dans la première équation du système donné; il vient, après réductions, la condition cherchée :

$$(a+b+c-1)^2-4abc=0. \qquad (1)$$

Seconde solution par MM. Déprez et Legrand. Les équations du système peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{x^2(1-a)}{a}=\frac{y^2(1-b)}{b}=\frac{z^2(1-c)}{c}=xy+xz+yz,$$

ou

$$x:y:z=\sqrt{\frac{a}{1-a}}:\sqrt{\frac{b}{1-b}}:\sqrt{\frac{c}{1-c}}.$$

Digitized by Google

Remplaçons x, y, z par ces radicaux dans la première équation du système; on trouvera, toutes réductions faites, la condition (1).

Question 1077.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 192).

On considère l'hyperbole équilatère ayant pour centre un point donné et bitangente à une conique donnée. Quand cette dernière tourne autour de son centre, le pôle de la corde de contact reste invariable.

Démontrer et généraliser cette proposition. (E. Duporcq).

Solution par M. Cl. Servais. I. Les cercles de Monge de toutes les coniques φ tangentes en deux points à une conique Σ, forment un faisceau dont les points limites sont le pôle A de la corde de contact et le centre de l'hyperbole équilatère du système φ. Donc, connaissant le centre O d'une hyperbole équilatère bitangente à une conique Σ, le pôle A de la corde de contact est commun au diamètre de Σ passant par le point O, et à la polaire du même point par rapport au cercle de Monge de la conique Σ. Ce pôle A est donc indépendant de la rotation de Σ autour de son centre.

II. Le problème suivant généralise dans le plan la question proposée : *connaissant le cercle de Monge d'une conique bitangente à une conique donnée* Σ, *construire le pôle de la corde de contact.* Ce pôle est l'un des points doubles de l'involution, déterminée sur le diamètre commun aux deux coniques, par les cercles de Monge de ces mêmes courbes. Le problème a donc deux solutions, qui restent invariables, si la conique Σ tourne autour de son centre.

III. Une droite l passant par A a la même droite conjuguée rectangulaire l', par rapport à toutes les coniques φ. Or si une droite tourne autour d'un point fixe A, sa conjuguée rectangulaire par rapport à une conique φ, enveloppe une parabole tangente aux axes de cette conique. Par suite : *L'enveloppe des axes des coniques* φ *est une parabole* π. (*Mathesis*, (2), VI, p. 39).

IV. Les deux droites conjuguées rectangulaires passant par A, sont tangentes à la parabole π; A est donc un point de la directrice de cette courbe. Si F est un foyer de l'une des coniques φ, la conjuguée rectangulaire de AF, est la perpendiculaire élevée au point F sur cette droite.

Digitized by Google

Donc : *le lieu des foyers des coniques* φ *est la podaire du point* A *par rapport à la parabole* π, *ou une strophoïde* (*Mathesis*, (2), VI, p. 40).

V. Généralisation dans l'espace. Les sphères de Monge de toutes les quadriques φ, circonscrites à une quadrique Σ le long d'une même conique, forment un faisceau, dont les points limites sont le pôle du plan de contact, et le centre d'un hyperboloïde spécial H, appartenant au système φ et ayant trois plans asymptotes rectangulaires. Donc, connaissant le centre O d'un hyperboloïde spécial H circonscrit à une quadrique Σ, le pôle du plan de contact est commun au diamètre de Σ passant par O, et au plan polaire du même point par rapport à la sphère de Monge de Σ. Ce pôle reste invariable, si Σ tourne autour de son centre.

VI. Problème. *Connaissant la sphère de Monge d'une quadrique circonscrite à une quadrique donnée* Σ, *construire le pôle du plan de contact.* Ce pôle est l'un des points doubles de l'involution déterminée sur le diamètre commun aux deux quadriques, par les sphères de Monge de ces mêmes surfaces. Le problème a donc deux solutions, qui restent invariables, si Σ tourne autour de son centre.

VII. Considérons un système de quadriques tangentes en deux points B et C à deux plans lB et lC. Tout plan passant par la droite l a même pôle par rapport à chacune des quadriques. Or si un plan tourne autour d'une droite fixe l, la normale à ce plan, menée par son pôle relatif à une quadrique φ, décrit un paraboloïde hyperbolique, tangent aux plans de symétrie de la quadrique φ. Dans le cas où les droites l et BC sont perpendiculaires, la normale enveloppe une parabole. Donc : *Les plans de symétrie des quadriques tangentes en deux points donnés à deux plans donnés, enveloppent un paraboloïde hyperbolique, ou sont tangents à une parabole.*

VIII. Dans le cas où les quadriques φ sont circonscrites à une quadrique Σ, le long d'une même conique, considérons deux couples quelconques de points B et C, B′ et C′ de cette conique.

D'après le paragraphe VII, les plans de symétrie des quadriques φ sont tangents à deux paraboloïdes hyperboliques. Ces deux surfaces ont d'ailleurs une génératrice commune, normale au plan polaire du point d'intersection des droites BC et B′C′. Par suite : *Les plans de symétrie des quadriques circonscrites à une quadrique* Σ *le long d'une même conique, sont osculateurs à une parabole gauche.*

Solution analytique par M. Déprez.

Digitized by Google

×Question 1078.

(Voir *Mathesis*, (2), tome VI, p. 192).

Soient O, I, I_a, I_b, I_c *les centres du cercle circonscrit et des cercles inscrits et exinscrits à un triangle* ABC, *et* R, r, r_a, r_b, r_c *les rayons de ces cercles. Les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles* I_a, I_b, I_c *forment un triangle* $A_1B_1C_1$. *Démontrer que le cercle inscrit à* $A_1B_1C_1$ *a même centre que le cercle circonscrit au triangle* $I_aI_bI_c$ *et qu'il a pour rayon*

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}. \qquad \text{(J. Neuberg).}$$

Solution par MM. Colart (Huy), Déprez *et* Delahaye. Le centre I_1 du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ est le point de rencontre des bissectrices A_1I_a, B_1I_b, C_1I_c. On voit aisément que les triangles (BC, A_1B_1, A_1C_1), (CA, B_1C_1, A_1B_1), (AB, A_1C_1, B_1C_1) sont isoscèles, les angles à la base étant respectivement égaux aux angles A, B, C. Par suite, les droites A_1I_a, B_1I_b, C_1I_c sont respectivement perpendiculaires sur BC, AC, AB, et, dans les triangles $I_bI_1I_c$, $I_aI_1I_c$, $I_aI_1I_b$ les angles à la base valent respectivement $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$. Ces triangles sont donc isoscèles et $I_1I_a = I_1I_b = I_1I_c$.

Dans le triangle isoscèle $I_aI_1I_b$, on a

$$I_1I_a = \frac{I_aI_b}{2\cos\frac{1}{2}C},$$

ou, à cause de la formule connue, $I_aI_b = 4R\cos\frac{1}{2}C$,

$$I_1I_a = 2R\,(*).$$

Or, on a la proportion

$$\frac{r_1}{r_a} = \frac{A_1I_1}{A_1I_a},$$

d'où, en observant que, dans le triangle $A_1B_1C_1$, les angles A_1, B_1, C_1 valent respectivement $2^d - 2A$, $2^d - 2B$, $2^d - 2C$, et que, par conséquent, $A_1I_a = \frac{r_a}{\cos A}$,

$$\frac{r_1 - r_a}{r_a} = \frac{I_1I_a}{A_1I_a} = \frac{2R\cos A}{r_a}.$$

(*) Plus simplement, ABC est triangle orthique de $I_aI_bI_c$, et le cercle ABC est celui des neuf points de $I_aI_bI_c$. (J. N.)

Digitized by Google

Par suite,

$$r_1 = r_a + 2R\cos A.$$

On aurait de même,

$$r_1 = r_b + 2R\cos B,$$
$$r_1 = r_c + 2R\cos C,$$

et, en additionnant,

$$3r_1 = r_a + r_b + r_c + 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Mais on a les formules

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R, \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Par conséquent,

$$r_1 = 2R + r = \frac{r_a + r_b + r_c + r}{2}.$$

Solution par M. Jeřabek (*Extrait*). Soient A_c, B_c les points de rencontre de A_1B_1 avec BC, AC; le triangle CA_cB_c est symétrique de CAB par rapport à I_bI_a. Les droites A_cI_a, B_cI_b, IC se coupent au centre i_c du cercle inscrit au triangle CA_cA_c; soit P le point de contact de A_cB_c avec ce cercle, de sorte que $i_cP = r$. Nous allons démontrer que i_c appartient à la circonférence $I_aI_bI_c$ et que les points I_1, i_c, P sont en ligne droite; il sera établi par là que $r_1 = I_1P = 2R + r$. En effet, l'angle $A_ci_cB_c = AIB = \pi - AI_cB$; dont le quadrilatère $I_cI_ai_cI_b$ est inscriptible. De plus,

$$\text{angle } I_1i_cI_a = I_1I_aA_c = I_aA_cA_1 + A_cA_1I_a = \frac{1}{2}A_1A_cC + \left(\frac{\pi}{2} - A_1A_cC\right);$$

d'où $I_1i_cI_a + A_1A_ci_c = \frac{1}{2}\pi$, ce qui démontre que I_1i_c passe par P.

Remarque. Les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont égaux à $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$; les côtés, la surface, le périmètre et le rayon du cercle circonscrit ont pour expressions :

$$a_1 = \frac{(2R + r)\sin A}{\cos B\cos C}, \text{ etc.}, \quad S_1 = (2R + r)^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

$$p_1 = (2R + r)\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \quad R_1 = \frac{2R + r}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

(Déprez)

Digitized by Google

Question 1121.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 126).

Si k^2 *est un cercle réel de centre* O, *et* k_r^2 *son cercle conjugué (complémentaire) :* 1° *les coniques passant par* O *et bitangentes à* k^2 *sont des ellipses*; 2° *les coniques passant par* O *et bitangentes au cercle imaginaire* k_r^2 *sont des ellipses, hyperboles ou paraboles suivant que la corde de contact coupe le cercle réel* k^2 *en deux points imaginaires, coïncidents ou distincts.* (V. Retali.)

Solution par M. R. Buyssens *et* Déprez. Soit O un point de l'axe d'une conique; O_1 le conjugué de O par rapport aux foyers situés sur cet axe; o_1 la polaire de O_1. Les perpendiculaires abaissées des points de o_1 sur leurs polaires respectives passent par O. Ce point est donc le centre d'un cercle qui a un double contact avec la conique considérée sur la droite o_1.

1° Si O est une extrémité du petit axe d'une ellipse, on voit aisément que le cercle (O) est toujours réel.

2° Si O est une extrémité du grand axe d'une ellipse, ce point est situé entre O_1 et ω, ω étant le point où o_1 rencontre l'axe; on a d'ailleurs $O\omega > O_1O$. Le cercle (O) est donc imaginaire et la corde de contact o_1 coupe le cercle conjugué en deux points imaginaires.

Lorsque O est un sommet d'une hyperbole, il tombe entre O_1 et ω et d'ailleurs $O\omega < O_1O$. Le cercle (O) est imaginaire et la corde de contact O_1 coupe le cercle conjugué en deux points réels.

Enfin si O est le sommet d'une parabole, il est le milieu de $O_1\omega$. Le cercle est imaginaire et la corde de contact o_1 est tangente au cercle conjugué.

Question 1135.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 214).

En un point M *d'une parabole, on trace la tangente et la normale, et, par le foyer* F *de la courbe, on mène une perpendiculaire à* FM *qui rencontre la tangente et la normale respectivement aux points* A *et* B. *Trouver*

1° *Le lieu du point* C, *milieu de* AB.

2° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* CMA.

3° *Le lieu du point* D *symétrique de* A *par rapport à* M. (G. Andrien).

Digitized by Google

Solution par M. J. Degueldre. 1° Soit P le point d'intersection de la tangente MA avec l'axe focal de la parabole. Les triangles CAM, PFM étant isosceles, les angles AMC, MPF sont complémentaires et, par suite, MC est perpendiculaire sur PF. Cela posé, prenons le foyer F pour origine des axes coordonnés ; l'axe des x, PF, rencontre MC en K et le triangle rectangle CFM donne

$$\overline{FK}^2 = CK.KM$$

d'où en désignant par x, y les coordonnées de C,

$$y = \frac{x^2}{\pm\sqrt{2px + p^2}}.$$

Le point C décrit donc une courbe symétrique par rapport à l'axe des x, tangente à cet axe en F et admettant pour asymptote la tangente au sommet de la parabole;

2° Si x', y' désignent les coordonnées de M, celles du point A, qui appartient à la directrice, sont $-p$, $\frac{px'}{y'}$; les hauteurs du triangle CMA correspondant aux sommets A et M ont pour équations respectives :

$$y = -p\frac{x'}{y'}, \quad y = \frac{y'}{x'}x,$$

d'où, par multiplication,

$$y^2 = px.$$

Le lieu est une parabole rapportée à son axe focal et à sa tangente au sommet.

3° Soient x, y les coordonnées de D ; on a

$$2x' = x - p, \quad 2y'^2 = yy' + px', \quad y'^2 = 2px' + p^2.$$

Eliminant x' et y' entre ces relations, on a pour l'équation du lieu

$$y = \frac{p\,(3x + p)}{\pm\sqrt{px}}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x et elle admet l'axe des y pour asymptote. On peut s'assurer que la valeur $x = \frac{1}{3}p$ rend y^2 maximum et que la courbe présente deux points d'inflexion dont les coordonnées sont $x = p$ et $y = \pm 2p$.

Digitized by Google

M. Barisien résout la même question en se servant de coordonnées polaires pour les nos 1 et 2. Il cherche également le lieu du point B et celui de l'orthocentre du triangle CMB, et trouve respectivement :

$$r = \frac{p\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}, \qquad r = \frac{p\cos\theta}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

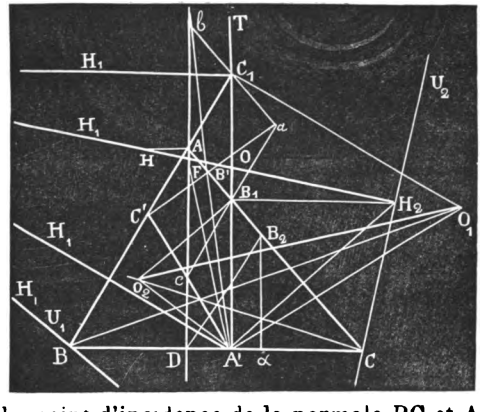
Question 1155.

Voir *Mathesis* (2) t. VIII, p. 31).

On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC *d'un triangle et sont normales au troisième* BC. *Chercher* 1° *l'enveloppe de la directrice*; 2° *les enveloppes des cordes joignant les points de contact de* AB *et* AC *ou joignant ces points au point d'incidence de* BC; 3° *le lieu du foyer.*

(J. Neuberg.)

Solution par M. H. Lez. Prenons pour axes le côté CB et la hauteur AD. Soient B′, C′ les points de contact de AC et AB avec l'une des paraboles



variables, A′ le point d'incidence de la normale BC et A′T la tangente en A′.

Une conique tangente au côté AB ($hx + ny - nh = 0$) et à la droite A′T ($x - d = 0$), avec la droite A′C′ ($lx + dy - dl = 0$) pour corde de contact, aura pour équation

$$(hx + ny - nh)(x - d) + k(lx + dy - dl)^2 = 0. \qquad (1)$$

Développant, nous trouverons une parabole si

$$k = \frac{n^2}{4d(dh - ln)}.$$

Digitized by Google

L'équation (1) devient alors

$$[(2dh - ln)x + ndy]^2 - 2d[ln^2(l - 2h) + 2dh^2(d + n) - 2dhln]x - 2d^2n(2dh - ln)y + d^2n(nl^2 - 4hln + 4dh^2) = 0. \quad (2)$$

De même, une parabole tangente au côté AC ($hx - my + mh = 0$) et à DE, suivant la corde A'B' ($\lambda x - dy - d\lambda = 0$) sera représentée par

$$[(2dh - \lambda m)x - mdy]^2 - 2d[\lambda m^2(\lambda + 2h) + 2dh^2(d - m) - 2dh\lambda m]x + 2d^2m(2dh - m\lambda)y + d^2m(m\lambda^2 + 4h\lambda m - 4dh^2) = 0.$$

Si ces courbes coïncident, elles satisferont à l'énoncé de la question; il suffit pour cela que les coefficients de leurs équations soient proportionnels. De là, les relations suivantes, en considérant les coefficients de y^2, de xy et les termes connus,

$$\frac{n^2}{m^2} = -\frac{n(2dh - nl)}{m(2dh - m\lambda)} = \frac{n(nl^2 - 4hln + 4dh^2)}{m(m\lambda^2 + 4h\lambda m - 4dh^2)};$$

nous en tirons

$$-2dhn + nm\lambda = 2dhm - mnl,$$

$$-4dh^2n + 4h\lambda mn + mn\lambda^2 = 4dh^2m - 4hlmn + mnl^2,$$

égalités qui donnent les valeurs de l et de λ :

$$l = \frac{h(dm + dn + nm)}{mn} \qquad \lambda = \frac{h(dm + dn - mn)}{mn}. \quad (3)$$

Cela trouvé, soient a, b, c, f, g, h, les coefficients de l'équation (2), de sorte que

$$a = (2dh - nl)^2 = \frac{h^2}{m^2}(dm - dn - nm)^2,$$

$$h = \frac{dhn}{m}(dm - dn - mn),$$

$$b = n^2d^2,$$

$$g = -\frac{dh^2}{m^2}(d^2m^2 + d^2n^2 - m^2n^2),$$

$$f = -\frac{d^2hn}{m}(dm - dn - mn),$$

$$c = \frac{d^2h^2}{m^2}[(dm + dn + nm)^2 - 4mn^2(d + m)],$$

les déterminants mineurs du discriminant de la conique ou

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \Delta$$

Digitized by Google

seront $A = bc - f^2 = \frac{4d^4h^2mn^3}{m^2}(d-n)(d+m)$,

$$B = ac - g^2 = -\frac{4d^2h^4n^2}{m^2}(d-n)^2(d+m)^2,$$

$$C = ab - h^2 = 0,$$

$$F = gh - af = -\frac{2d^2h^3n^2}{m^2}(d-n)(d+m)(dm - dn - mn),$$

$$G = hf - bg = \frac{2d^3h^2mn^3}{m^2}(d-n)(d+m),$$

$$H = fg - ch = -\frac{2d^3h^3n^2}{m^2}(d-n)(d+m)(dm - dn - nm).$$

1° L'équation générale de la directrice d'une parabole, c'est-à-dire $Gx + Fy = \frac{1}{2}(A + B)$, devient pour la parabole (2) :

$$dmnx - h(dm - dn - nm)y - d^2mn + h^2(d-n)(d+m) = 0 \quad (4)$$

ou

$$d^2(h^2 - mn) - d[-mnx + h(m-n)(y-h)] + nmh(y-h) = 0.$$

La variable d figurant au 2me degré, cette droite enveloppe une conique

$$4mnh(y-h)(h^2 - mn) = [h(m-n)(y-h) - mnx]^2,$$

soit la parabole

$$0 = [mnx + h(n-m)y]^2 - 2mnh^2(n-m)x -$$

$$2h[h^2(n-m)^2 - 2mn(mn - h^2)]y + h^2[h^2(n-m)^2 - 4mn(mn - h^2)],$$

qui passe par A.

2° Par suite des relations (3), les équations des cordes de contact A'C' et A'B' deviennent :

$$h(dm + dn + nm)x + dmny - dh(dm + dn + mn) = 0,$$

et

$$h(dm + dn - mn)x - dmny - dh(dm + dn - mn) = 0.$$

Elles peuvent s'écrire aussi :

$$d^2h(m+n) + d(hmn - hmx - hnx - mny) - hmnx = 0$$

et

$$d^2h(m+n) - d(hmn + hmx + hnx - mny) + hmny = 0.$$

Digitized by Google

La variable d figurant de nouveau au 2me degré, ces deux droites enveloppent des coniques qui sont les paraboles :

$$[h(m+n)x+mny]^2+2h^2mn(m+n)x-2hm^2n^2y+h^2m^2n^2=0,$$
$$[h(m+n)x-mny]^2-2h^2mn(m+n)x-2hm^2n^2y+h^2m^2n^2=0,$$

tangentes à l'axe des Y au point A ($y=h$) et tangentes à l'axe des X en des points symétriques $x=\mp\frac{mn}{m+n}$.

Pour $y=h$, $x=\mp\frac{4mn}{m+n}$.

Nous obtiendrions de même l'enveloppe de la corde B'C' dont l'équation est

$$0=h[d(m^2+n^2)+mn(n-m)]x-mn[d(n-m)+2mn)]y-h[d^2(m+n)^2-dmn(n-m)-2m^2n].$$

3° Les coordonnées du foyer d'une parabole étant données par les relations :

$$(F^2+G^2)x=FH+\tfrac{1}{2}(A-B)G,$$
$$(F^2+G^2)y=GH-\tfrac{1}{2}(A-B)F,$$

nous aurons pour la parabole (2) :

$$[d^2m^2n^2+h^2(dm-dn-nm)^2]x=$$
$$d^2[m^2d(h^2+n^2)+h^2n(n-m)(d+m)]$$
$$[d^2m^2n^2+h^2(dm-dn-nm)^2]y=h^2(d-n)(d+m)(dm-dn-mn).$$

Eliminant la variable d, nous aurons une relation qui représentera le lieu du foyer cherché. Prenant pour nouvel axe des X une parallèle passant par le sommet A, on aura pour ce lieu la cubique

$$(x^2+y^2)[h^2(m-n)x-\{m^2n^2+h^2(m^2+n^2-mn\}y]-h[(h^2+mn)x-h(m-n)y]^2=0.$$

L'origine A fait partie du lieu.

La droite $y=-h$ rencontre la courbe en trois points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$(m-n)x^3+(m^2+n^2-3mn-h^2)x^2-(m-n)(h^2+2mn)x+mn(h^2+mn)=0,$$

décomposable en un produit de trois facteurs

$$(x-n)(x+m)[x(m-n)-h^2-mn]=0.$$

Digitized by Google

La cubique passe donc par les points C et B. C'est une hyperbole défective qui s'étend vers l'infini avec une asymptote parallèle à la droite

$$h^3(m-n)x - [m^2n^2 + h^2(m^2 + n^2 - mn)]y = 0.$$

Solution géométrique. En un point quelconque A′ de BC élevons une perpendiculaire, qui coupe AB en C_1, AC en B_1. Une parabole π du système considéré touche AB, AC et B_1C_1, la dernière droite en A′. Il est facile de déterminer les points de contact C′ et B′ de AB et AC. En effet, soit *abc* le triangle des parallèles menées aux côtés du triangle AB_1C_1 par les sommets opposés; d'après un théorème connu, les cordes de contact A′B′, A′C′, B′C′ des angles C_1, B_1, A du triangle AB_1C_1 passent respectivement par les points *c*, *b*, *a*.

Cela posé, si le point A′ se déplace sur BC, les points A′, B_1, C_1, *c*, *b*, *a* décrivent des ponctuelles semblables. On en conclut que les droites A′B′ et A′C′ enveloppent deux paraboles π_a, π_b qui touchent le côté BC et la hauteur AD, celle-ci en A; car, lorsque A′ est en D, le parabole π devient la droite double AD, et B′ et C′ se confondent avec A. Le point de contact de BC avec la parabole π_b est la position de A′ qui correspond à *c* confondu avec D; on l'obtient donc en menant DB_2 parallèle à AB et en abaissant $B_2\alpha$ perpendiculaire à BC; la parabole π touche alors AB en B et αB_1 en α. On trouve de même le point de contact de BC avec π_c. Supposons A′ en C; alors A′*c* est parallèle à AB et C′ est à l'infini; la parabole π dégénère en une droite double qui est la parallèle menée à AB par C, et cette parallèle touche π_b. Semblablement, la parabole π peut dégénérer en la parallèle menée par B à AC; cette parallèle est une tangente de π_c.

Lorsque l'on considère toutes les paraboles inscrites à un triangle AB_1C_1, les cordes de contact de trois angles du triangle engendrent des faisceaux projectifs. On en déduit facilement que dans la question proposée, le point *a* engendre une ponctuelle projective avec le faisceau directeur (*) de la droite B′C′; par suite, B′C′ enveloppe une parabole π_a qui touche en A la droite A*a*, conjuguée harmonique de la hauteur AD par rapport à l'angle BAC. Les parallèles à AB par C et à AC par B sont tangentes à la parabole π_a.

(*) Nous appelons ainsi l'ensemble des parallèles menées par un point fixe à une droite mobile.

Digitized by Google

La directrice de π passe par les orthocentres H, H_1, H_2 des triangles circonscrits AB_1C_1, $(BC_1, A'C_1, A'C_1)$(*), $(CB_1, A'B_1, A'B_1)$. Le point H_1 est à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A' sur BC_1, avec la perpendiculaire élevée en C_1 sur $A'C_1$; lorsque A' se déplace sur BC, H_1 décrit sur une droite fixe BU_1 une ponctuelle semblable à celle du point A'. Par analogie, H_2 décrit aussi une ponctuelle rectiligne CU_2 semblable à la ponctuelle (A'). On en conclut que la directrice H_1H_2 enveloppe une parabole, qui touche les droites BU_1, CU_2 et la parallèle à BC par A.

Le foyer F de π se trouve à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles AB_1C_1, $(BC_1, A'C_1, A'C_1)$, $(CB_1, A'B_1, A'B_1)$. Les centres O, O_1, O_2 de ces circonférences décrivent trois ponctuelles semblables; par suite, les droites OO_1, O_1O_2, OO_2 enveloppent trois paraboles. F est à l'intersection de la circonférence AB_1C_1 avec la symédiane du triangle AB'C' issue du sommet A. Le centre O du cercle et la symédiane engendrent une ponctuelle et un faisceau projectifs. Si donc on prend pour origine des coordonnées le sommet A et pour axe des x la droite AO, F est déterminé par deux équations de la forme

$$y = \lambda x, \quad x^2 + y^2 - 2\frac{m\lambda + n}{p\lambda + q}x = 0,$$

où λ est un paramètre variable; m, n, p, q sont des constantes. On en conclut (en éliminant λ) que F décrit une cubique circulaire. (J. N.)

Question 1168.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 104).

On mène en un point M *d'une parabole la tangente* MT *et la normale* MQP *qui rencontre l'axe en* Q *et la courbe en* P. *On projette* P *en* R *sur la directrice, et on mène en* P *la normale qui coupe en* N *l'axe. Démontrer* 1° *que* MQ *est égale à la distance de* R *à la parallèle menée par le foyer* F *à* MT; 2° *que* QP *est égale à la distance de* N *à* MT. (A. C.)

Solution par M. E. Colart. 1° En désignant par x', y' les coordonnées de M, on trouve aisément pour coordonnées de P,

$$x = \frac{(p + x')^2}{x'}, \quad y = -\frac{2p(p + x')}{y'}.$$

(*) Une tangente $A'C_1$ avec son point de contact A' remplace deux tangentes menées par A'.

Digitized by Google

Par conséquent, la perpendiculaire abaissée de R sur la tangente MT et la parallèle menée par F à cette tangente ont pour équations

$$y + \frac{2p(p+x')}{y'} = -\frac{y'}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

$$y = \frac{p}{y'}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

En résolvant ces deux équations, on trouve $x = -\frac{3p}{2}$.

Par suite, en désignant par C la projection de R sur la parallèle menée par F à la tangente MT, par D la projection de C sur la directrice, et par E la projection de M sur l'axe, on aura

$$CD = p = EQ,$$

et les deux triangles rectangles RCD, MEQ seront égaux. Donc $RC = MQ$.

2° Projetons P en G sur l'axe, N en H sur MP, N en I sur MT, en K sur la directrice. Les deux triangles NPG et FRK étant égaux, les triangles FCR, NHP sont égaux. Par suite, $HP = RC = MQ$, et l'on a

$$NI = MQ + HQ = PQ.$$

Autre solution analytique par M. Barisien; solution géométrique par M. Droz Farny.

×Question 1169.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 128).

Résoudre le système

$$\operatorname{tg}(y+z) = a \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(z+x) = b \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = c \operatorname{tg} z.$$

Solution par M. Barbette. Après avoir développé les premiers membres, chassé les dénominateurs, puis divisé par le produit $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$, si l'on fait

$$\frac{1}{\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = x', \quad \frac{1}{\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x} = y', \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = z', \tag{1}$$

le système proposé s'écrit

$$ax' - y' - z' = a; \quad -x' + by' - z' = b; \quad -x' - y' + cz' = c;$$

Digitized by Google

d'où

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ b & b & -1 \\ c & -1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}, \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & c & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}, \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -1 & b & b \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}.$$

Or

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{x'y'z'};$$

par conséquent, d'après les égalités (1),

$$\operatorname{tg} x = x' \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \pm \sqrt{\frac{x'}{y'z'}}, \text{ etc.}$$

MM. Barisien et Coppieters (Gand) ont résolu la même question.

QUESTIONS D'EXAMEN.

851. Les formules

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a_1 t^2 + b_1 t + c, \quad z = a_2 t^2 + b_2 t + c_2,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz, et où t est un paramètre variable, représentent une courbe plane.

Car on a

$$\begin{vmatrix} x - c, & a_1 & b \\ y - c_1, & a_1 & b_1 \\ z - c_2, & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

852. Chercher la condition pour que les formules

$$\begin{aligned} x &= at^3 + bt^2 + ct + d, \\ y &= a't^3 + b't^2 + c't + d', \\ z &= a''t^3 + b''t^2 + c''t + d'' \end{aligned}$$

définissent une courbe plane.

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ est l'équation du plan de la courbe, on doit avoir :

$$Aa + Ba' + Ca'' = 0, \quad Ab + Bb' + Cb'' = 0,$$
$$Ac + Bc' + Cc'' = 0, \quad Ad + Bd' + Cd'' + D = 0,$$

Digitized by Google

d'où la condition

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

853. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{\sin(x-a)} + \frac{1}{\sin(x+a)} = \frac{2}{\sin x}.$$

Réponse : $\sin x = \pm\sqrt{2}\sin\frac{a}{2}$.

854. Trouver les six derniers chiffres d'un nombre sachant que son cube est terminé par 777777. (GELIN).

Le chiffre des unités est évidemment 3. Le cube de $(10x+3)$ est un multiple de cent plus $270x+27$; on voit que $27x$ doit être terminé par 5, donc $x=5$. Le cube de $(100y+53)$ est un multiple de mille plus $842700y+148877$; donc $7y+8$ doit se terminer par 7; le dernier chiffre de y est donc 7. En continuant ainsi, on voit que le nombre cherché se termine par 660753.

855. Résoudre le système

$$x+y+z=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$$

$$xy+yz+zx=c.$$

856. Construire un triangle connaissant les longueurs des côtés b et c, et l'inclinaison de a sur la médiane correspondante.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1181. On considère toutes les paraboles qui touchent une droite donnée OA en un point fixe A, et une droite OB au point B; la droite OB est supposée tourner autour de O et la distance OB est égale à une longueur connue b. Trouver le lieu des points d'intersection de l'une de ces paraboles avec la bissectrice de l'angle correspondant AOB.

(CHAIKEVITSCH.)

1182. Une courbe Δ est rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. En un point quelconque M de Δ on mène la tangente MT et l'ordonnée MP. Soit M′ le point où la parallèle à MT par l'origine O coupe MP. Construire la tangente à la courbe Δ', lieu du point M′. Trouver une relation entre les aires engendrées par les ordonnées MP et M′P.

(PETIT-BOIS.)

Digitized by Google

1182. Par un point P du plan d'un triangle donné ABC, on mène des parallèles aux symédianes; soient A', B', C' les points de rencontre de ces parallèles avec les côtés correspondants de ABC.

1° Trouver le lieu d'un point P tel que

$$A'B'C' = \frac{3}{16} ABC.$$

2° Quel est, dans ce cas, le lieu du centre de gravité du triangle A'B'C'?

3° Trouver l'enveloppe de chaque côté de A'B'C'. (J. Déprez).

×**1184.** Résoudre et construire un triangle ABC, connaissant a, B et $b + \alpha c$, α étant un nombre donné, positif ou négatif. — Discussion.

×**1185.** Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD, on considère une aire quelconque S_α située dans le plan BCD. Soit S_β la projection de S_α sur le plan ACD, les projetantes étant parallèles à l'arête SB; soient S_γ, S_δ les projections analogues de S_α sur les plans ABD, ABC. Appelons V_β, V_γ, V_δ les volumes des cônes qui ont pour sommet commun un point quelconque M du plan BCD, et pour bases respectives S_β, S_γ, S_δ. Démontrer que la somme algébrique de ces volumes est égale au volume du cône de sommet A et de base S_α. (J. N.)

1186. L'angle A du triangle ABC est fixe, et la somme (différence) des côtés AB, AC est constante. Démontrer que la droite d'Euler HO passe par un point fixe de la bissectrice intérieure (extérieure de l'angle A). Si l'angle A est de 120° (60°), la droite HO est parallèle à la bissectrice de l'angle A. (Soons).

1187. Etant données quatre droites a, b, c, d et un point P dans un même plan, on mène par le point de rencontre S des droites a et b une sécante variable m, qui coupe c en C et d en D. La droite PC rencontre a en A, b en B; la droite PD rencontre a en A', b en B'. Démontrer que les droites A'B, AB' pivotent chacune autour d'un point fixe et que leur point d'intersection décrit une droite. (Davidoglou.)

1188. Soient F, F' les foyers d'une conique, MA et MB deux tangentes à la courbe, A le point de contact de l'une d'elles et B le point où la seconde rencontre la tangente parallèle à MA; démontrer que les cercles circonscrits aux triangles MAF et MBF' se coupent au point de rencontre des droites AF' et BF. (M. Stuyvaert).

Rectification. Page 174, ligne 3 en remontant, lire $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ au lieu de $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$.

Digitized by Google

Fig. 1.

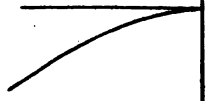
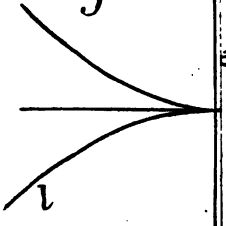


Fig. 3.



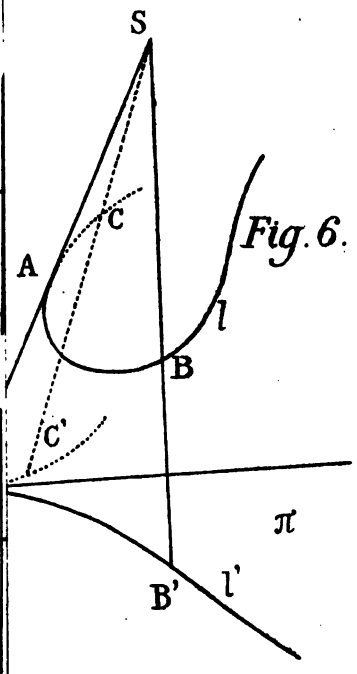
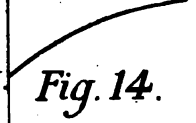


Fig. 6.

Fig. 14.



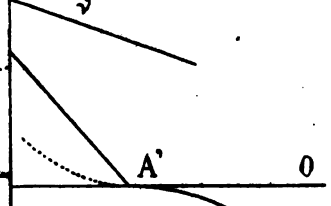
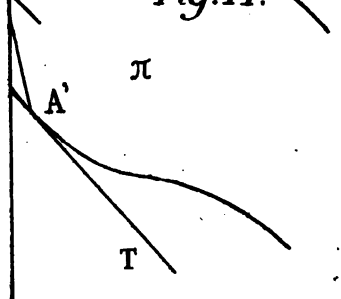


Fig. 9.

Fig. 17.



Digitized by Google

Digitized by Google

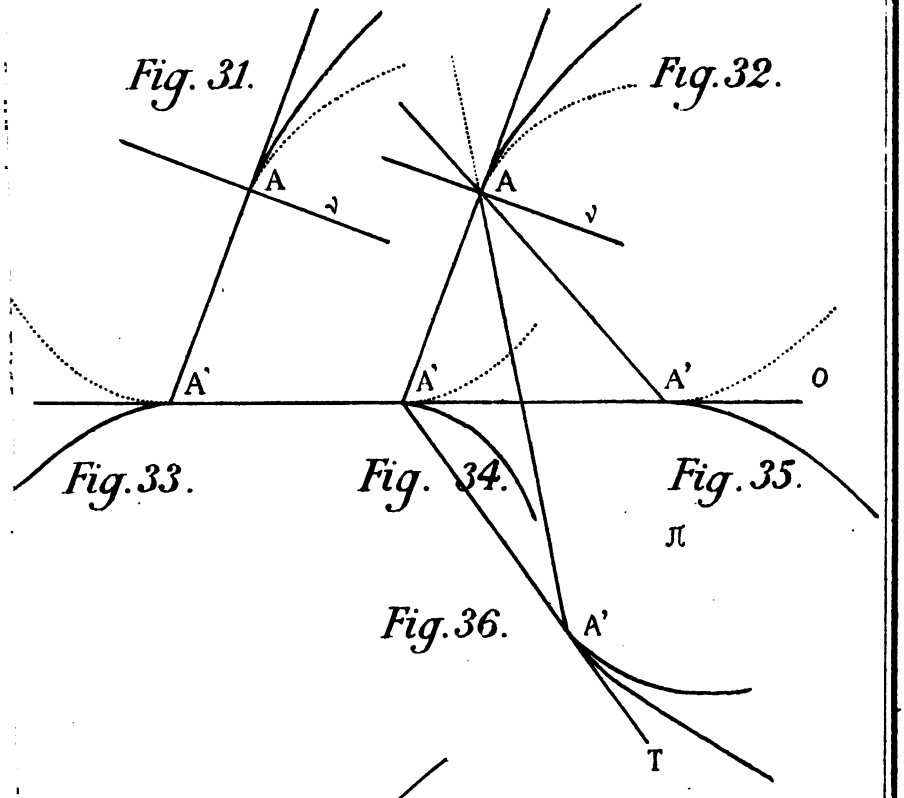


Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36.

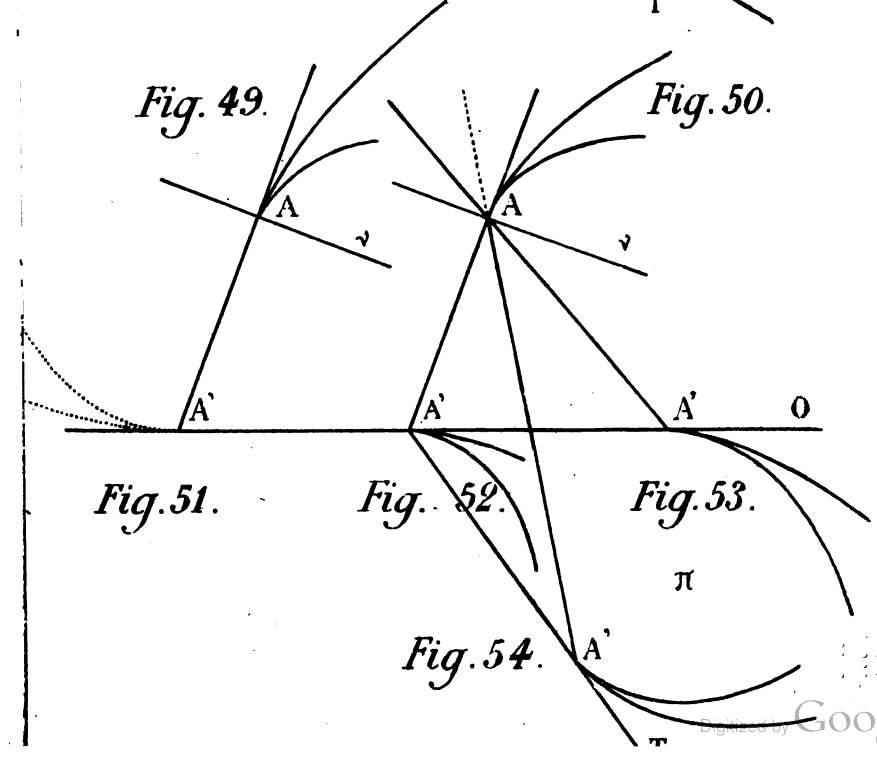


Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SIMPLE REMARQUE SUR LE TRIANGLE;

par M. De Tilly.

1. Je distinguerai les triangles, pour simplifier un peu le langage, en triangles de première, de seconde et de troisième espèce, selon que la somme de leurs angles sera égale à deux droits, supérieure ou inférieure à deux droits.

2. S'il existe un triangle de première espèce, tous les triangles sont de première espèce (Legendre et Lobatchefsky).

3. S'il n'existe pas de triangle de première espèce, tout triangle est de même espèce que les triangles qu'on obtient en le décomposant en deux parties par une droite quelconque issue d'un sommet.

Soit 2 droits $+ x$ la somme des angles du triangle ABC, x pouvant être positif ou négatif; et supposons qu'il puisse exister un triangle tel que ABD ou ACD, dont la somme des angles soit 2 droits $+ y$, y étant de signe contraire à x; D est situé sur BC entre B et C.

Faisons mouvoir le point D sur la droite BC, en joignant ses positions successives, D', D'',...., au point A, et en choisissant le sens du mouvement de manière à agrandir le triangle sur lequel on raisonne (ABD par exemple). La somme des angles du triangle variable, qui est 2 droits $+ y$ pour ABD, se modifiera par voie de continuité, et deviendra 2 droits $+ x$ quand D sera arrivé en C. Or, y et x étant de signes contraires, cette somme aura dû passer par 2 droits, ce qui est en opposition avec l'hypothèse (*).

4. Deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit égal sont de même espèce. En effet, ils peuvent être accolés par leur côté égal, de manière à former un triangle total analogue à ABC, et l'on rentre dans le n° 3.

5. Deux triangles rectangles quelconques sont de même espèce. Car s'ils ont respectivement pour côtés de l'angle droit a et b, c et d, ils peuvent être comparés, comme au n° 4, à un troisième triangle rectangle, ayant pour côtés de l'angle droit a et c, a et d, b et c, ou b et d.

(*) Nous avons fait observer à M. De Tilly qu'il admettait ici que y varie continuement avec BD. Il nous a répondu que, suivant lui, on ne peut trouver aucune exposition des premiers principes de la géométrie qui soit affranchie d'un semblable postulat (P. M.).

Digitized by Google

6. Deux triangles quelconques sont de même espèce. En effet, on peut les décomposer, l'un et l'autre, en triangles rectangles, et l'on est ramené aux nos 5 et 3.

7. On peut maintenant, si l'on veut, démontrer d'une manière simple (c'est-à-dire comme cela est fait aux pages 107 à 109 de mon *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*) le théorème suivant :

Si les triangles plans sont de la deuxième ou de la troisième espèce, la différence entre la somme de leurs angles et deux angles droits est proportionnelle à l'aire du triangle.

Il en résulte que, dans tout système de géométrie autre que le système usuel, l'aire du triangle ne peut dépasser un certain maximum.

Juin 1898.

SUR LA SPHÈRE ET LES QUADRIQUES DE DOUZE POINTS DU TÉTRAÈDRE GÉNÉRAL ;

par M. L. Ripert.

1. Tout triangle dont le cercle circonscrit est C a son *cercle des neuf points* C′, les centres de similitude étant l'orthocentre H (direct) et le barycentre G (inverse). D'après une remarque due à M. Brocard, la considération de ces deux centres de similitude suffit pour définir les neuf points de C′.

Tout tétraèdre *orthocentrique*, dont la sphère circonscrite est S, a une *seconde sphère de douze points* S′, les centres de similitude qui sont également l'orthocentre H et le barycentre G permettant de définir douze points de S′.

Dans le tétraèdre *général*, on peut définir une *sphère de douze points* par les mêmes considérations. En effet, la sphère S de centre O circonscrite au tétraèdre ABCD et la sphère S′ de centre O′ déterminée par les centres de gravité des faces, ont, par définition, le barycentre G pour centre de similitude inverse. Leur centre de similitude directe est le centre H de l'hyperboloïde des hauteurs, car ce point est défini par $OG = GH$, égalité qui, avec $OG = 3GO'$, entraîne $HO = 3HO'$. Donc, le théorème suivant est démontré :

Dans tout tétraèdre ABCD, *les centres de gravité des faces, les points*

Digitized by Google

situés sur les droites AH, BH, CH, DH *au tiers des distances à partir de* H, *les points situés, sur le prolongement de ces droites, au tiers des distances de* H *à la sphère circonscrite* S, *sont douze points d'une même sphère* S', *dont le rayon est le tiers de celui de la sphère* S *et dont le centre est au tiers de la distance de* H *au centre de* S.

2. On peut définir géométriquement, sur la sphère S', au moins huit autres points. Car, soit A_1 le point de rencontre de AG et de S. En prenant, sur le prolongement de A_1G, $GA' = \frac{1}{3} A_1G$, on aura un point A' de S'. Menant HA' et prenant $HA_2 = 3HA'$, on aura un point A_2 de S, qui, en menant A_2G et prenant $GA'' = \frac{1}{3} A_2G$, donnera un point A'' de S'. D'ailleurs, par chaque sommet A passent une infinité de droites remarquables (AI, AI_b,... AL,... et toutes les droites qui joignent A à un point remarquable du triangle BCD). Chacune de ces droites coupe S en un second point, auquel correspondent, par H, puis par G, deux points de S'. On peut donc déterminer géométriquement une infinité de points sur la sphère S'.

Il est facile de voir en outre que le cercle complémentaire (par rapport au tétraèdre) du cercle circonscrit à une face (BCD) est l'intersection de la sphère S' et du cône ayant pour sommet le sommet opposé (A) et pour directrice le cercle des neuf points de cette face (BCD). Donc, les quatre cercles de S' circonscrits aux faces du tétraèdre complémentaire sont des cercles remarquables.

3. La *première sphère de douze points* du tétraèdre orthocentrique (sphère de centre G passant par les milieux des arêtes et les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées) n'existe pas dans le tétraèdre général. Mais, par une première transformation homographique (le plan de l'infini étant conservé et une conique quelconque de ce plan se substituant au cercle de l'infini), on obtient ce théorème : *Dans tout tétraèdre, les milieux des arêtes et les pieds des conjuguées communes aux arêtes opposées, par rapport à une quadrique donnée* Σ *telle que les conjuguées des faces menées par les sommets opposés soient concourantes*(*), *sont douze points d'une même quadrique* Σ', *homothétique à* Σ *et ayant*

(*) Il existe une infinité de quadriques Σ remplissant cette condition. Ce sont celles par rapport auxquelles deux couples d'arêtes opposées (d'où résulte le troisième) sont conjuguées.

Digitized by Google

pour centre le barycentre G. On peut ensuite généraliser ce théorème en substituant au plan I de l'infini un plan arbitraire P, puis le transformer par dualité.

Lorsque l'on remplace I par P, le milieu de AB devient le conjugué harmonique du point de rencontre de AB avec P par rapport au couple de points (A, B); nous dirons, par abréviation, le *point harmonique* de AB (par rapport à P). — Le barycentre G est le centre d'homothétie (correspondant au plan d'homothétie I) des tétraèdres ABCD, A'B'C'D', A' étant le centre d'homothétie des triangles BCD, *bcd*, ce dernier ayant pour sommets les milieux des côtés de BCD. Il devient le *centre* K d'homologie *correspondant* au plan d'homologie P des tétraèdres ABCD, $A_1'B_1'C_1'D_1'$, A_1' étant le centre d'homologie des triangles BCD, $b_1c_1d_1$, ce dernier ayant pour sommets les points harmoniques des côtés de BCD.

Deux droites sont perpendiculaires si leurs points d'intersection avec le plan I sont pôles conjugués par rapport au cercle de l'infini γ. Deux plans sont perpendiculaires si leurs droites d'intersection avec I sont polaires conjuguées par rapport à γ. Une droite et un plan sont perpendiculaires si le pied de la droite sur I est le pôle par rapport à γ, de la droite commune à P et à I. La perpendiculaire commune à deux droites est l'intersection des plans menés par chacune d'elles perpendiculairement au plan de leurs directions communes, c'est-à-dire à un plan passant par leurs pieds sur I. Toutes ces définitions subsistent lorsque l'on remplace le cercle γ du plan I par une conique Γ du plan P, le mot *conjugué* (par rapport à P, Γ) étant substitué au mot *perpendiculaire*.

Dès lors, le théorème général est le suivant : *Dans tout tétraèdre considéré par rapport à un plan* P *et à une quadrique* Σ, *qui coupe* P *suivant la conique* Γ *et qui est telle que les droites menées des sommets aux pôles, par rapport à* Γ, *des droites d'intersection de* P *et des faces opposées soient concourantes, les points harmoniques des arêtes et les pieds des conjuguées communes aux arêtes opposées sont douze points d'une même quadrique* Σ', *passant par* Γ *et par rapport à laquelle le pôle du plan* P *est son centre correspondant* K.

4. Moyennant quelques définitions (ou explications) que l'on trouve immédiatement par corrélation, le théorème corrélatif est : *Dans tout tétraèdre, considéré par rapport à un point* P *et à une quadrique* Σ,

Digitized by Google

inscrite au cône Γ *de sommet* P *et qui est telle que les droites d'intersection des faces avec les plans polaires, par rapport au cône* Γ, *des droites*(*) *de jonction de* P *et des sommets opposés soient dans un même plan, les plans harmoniques des arêtes et les plans conjugués correspondant aux couples d'arêtes opposées sont douze plans tangents à une même quadrique* Σ′, *inscrite à* Γ *et par rapport à laquelle le plan polaire de* P *est son plan d'homologie correspondant* K.

Il n'est pas difficile de trouver des généralisations et dualisations analogues pour tout théorème intéressant soit le cercle ou la sphère, soit les coniques ou quadriques considérées dans leurs relations avec la droite ou le plan de l'infini.

EXERCICES,

par M. E. N. Barisien (*Suite et fin*; voir p. 156 et 185).

26. On considère un cercle fixe O, un diamètre fixe Δ de ce cercle et une corde variable Δ′ perpendiculaire à Δ.

1° Le lieu des centres des huit cercles tangents à la fois au cercle O et aux droites Δ et Δ′ se compose de deux paraboles.

2° Si on ne considère que les quatre cercles situés d'un même côté de Δ, le lieu du centre des moyennes distances des centres de ces quatre cercles est le diamètre du cercle O perpendiculaire à Δ.

3° Pour ces quatre mêmes cercles, la somme des rayons des deux cercles tangents extérieurement à O, diminuée de la somme des rayons des deux cercles tangents intérieurement à O, est égale à quatre fois le rayon du cercle O.

27. En un point quelconque du périmètre d'une ellipse on décrit un cercle ayant pour centre ce point et de rayon quelconque. Montrer que le centre de l'hyperbole équilatère passant par les points d'intersection du cercle et de l'ellipse se trouve toujours sur une même ellipse.

(*) De même que, par rapport à une conique, un point *du plan* a une droite (et non un plan) polaire, de même, par rapport à un cône du 2e degré, un plan *passant par le sommet* a une polaire (et non un pôle). Le fait est d'ailleurs élémentaire; nous le rappelons comme exemple de la manière de lever, par l'examen de la corrélation, toute difficulté apparente.

Digitized by Google

28. Les courbes dont les équations en coordonnées rectilignes sont

$$(ab)^{n-1}(x^2+y^2)^{n+1} = (a^2x^2+b^2y^2)^n$$
$$(ab)^{n+2}(x^2+y^2)^n = (a^2x^2+b^2y^2)^{n+1}$$

ont des aires équivalentes.

29. Le lieu des points tels qu'en menant des tangentes à une ellipse donnée, le produit des distances du centre aux tangentes soit égal au produit des demi-axes de l'ellipse, se compose d'une hyperbole et d'une ellipse.

Les coefficients angulaires de ces tangentes vérifient l'équation $mm' = \pm\frac{a}{b}$.

(J. N.)

30. Mener à l'ellipse une normale telle que le cercle ayant pour diamètre la portion de normale interceptée entre les axes, soit tangent à l'ellipse.

31. Les coniques osculatrices ayant un contact du 3e ordre avec une ellipse donnée et passant par le centre de cette conique ont une aire constante.

32. Une ellipse de grandeur invariable se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné. Si $2a$ et $2b$ sont les axes de l'ellipse, montrer que :

1° Le lieu des centres se compose de deux ovales dont l'aire totale est $\pi(a-b)^2$.

2° Le lieu des foyers a pour aire totale $\pi a(a-b)$.

3° Le lieu des sommets du grand axe a pour aire totale $\pi a^2+\pi(a-b)^2$.

4° Le lieu des sommets du petit axe a pour aire totale $\pi b^2+\pi(a-b)^2$.

5° La courbe enveloppe du grand axe a pour aire totale

$$\frac{\pi b(a-b)^2(a+3b)}{8a(a+b)}.$$

6° La courbe enveloppe du petit axe a pour aire totale

$$\frac{\pi a(a-b)^2(3a+b)}{8b(a+b)}.$$

7° Le lieu des projections du point donné sur le grand axe a pour aire $\frac{\pi b^3}{a+b}$.

Digitized by Google

8° Le lieu des projections du point donné sur le petit axe a pour aire $\frac{\pi a^3}{a+b}$.

33. Le lieu des sommets des angles d'ouverture constante θ, circonscrits à une ellipse de demi-axes a et b se compose de deux ovales dont la somme des aires est $\frac{2\pi(a^2+b^2)}{\sin^2\theta}$.

34. Si une ellipse de grandeur donnée roule sur deux droites rectangulaires :

1° le lieu des foyers se compose de quatre ovales dont chacun a une aire équivalente à celle d'un cercle ayant pour rayon la demi-distance focale ;

2° le lieu des sommets du grand axe se compose de quatre ovales égaux ayant chacun pour aire celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre ;

3° le lieu des sommets du petit axe est formé par quatre ovales égaux ayant chacun une aire équivalente à celle du cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

35. On donne deux ellipses **E** et E′, concentriques et ayant mêmes directions d'axes. Une normale quelconque à E rencontre E′ en deux points A et B. Les normales en A et B à E′ se coupent en P. De P, on peut abaisser sur E′ deux autres normales de pieds C et D. Montrer que : 1° la droite CD enveloppe une ellipse ; 2° les tangentes à E′ en A et B se rencontrent sur une kreuzcurve.

36. Le quadruple de l'aire de la courbe, lieu des milieux des rayons de courbure d'une ellipse, est équivalent à trois fois l'aire de la développée, moins l'aire de l'ellipse.

37. Montrer que, si φ est l'angle d'anomalie excentrique en un point variable d'une ellipse, et si α est un angle constant, $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse, la droite

$$x(a\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi - b\cos\varphi) + \alpha(a\sin\varphi + b\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi) = ab(1+\sin\varphi\cos\varphi)$$

enveloppe une courbe fermée ayant pour aire

$$U = \frac{5}{8}\pi ab\cos^2\alpha.$$

38. 1° La courbe enveloppe des cordes communes à une ellipse et à

Digitized by Google

son cercle osculateur a une aire équivalente à $1\frac{1}{2}$ fois celle de l'ellipse.

2° La développée de cette enveloppe a une aire égale à 6 fois l'aire de l'ellipse plus $5\frac{1}{4}$ fois l'aire de la développée de l'ellipse.

3° Le lieu des milieux des cordes communes a son aire égale à la moitié de celle de l'ellipse.

4° La perpendiculaire élevée à la corde commune au point de contact du cercle osculateur avec l'ellipse enveloppe une développée d'ellipse.

Voir, au sujet de cette question, les N. A. M. 1873, pp. 34-40. (J. N.)

29. Parmi toutes les ellipses ayant un foyer donné F et passant par deux points donnés A et B tels que l'angle BFA soit droit : 1° quelle est celle d'aire maxima ou minima? 2° quelle est celle qui se rapproche le plus de la forme circulaire?

SUR UNE CUBIQUE CIRCULAIRE;

par M. V. Jeřábek.

I. Étant données une circonférence (O) et une tangente AC, cherchons le lieu du milieu M du segment d'une tangente variable compris entre le point de contact B et la tangente fixe AC.

Si l'on prend pour axes OA et le diamètre perpendiculaire, et qu'on appelle (x,y), (x',y') les coordonnées des points M, B, on trouve facilement les équations

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \quad xx' + yy' = r^2, \quad x = \frac{1}{2}(x' + r);$$

d'où, en éliminant x' et y' :

$$4xy^2(x - r) = -(2x^2 - rx - r^2)^2,$$

et, en supprimant le facteur $x - r$ commun aux deux membres,

$$4x(x^2 + y^2) - 3r^2x - r^3 = 0. \qquad (1)$$

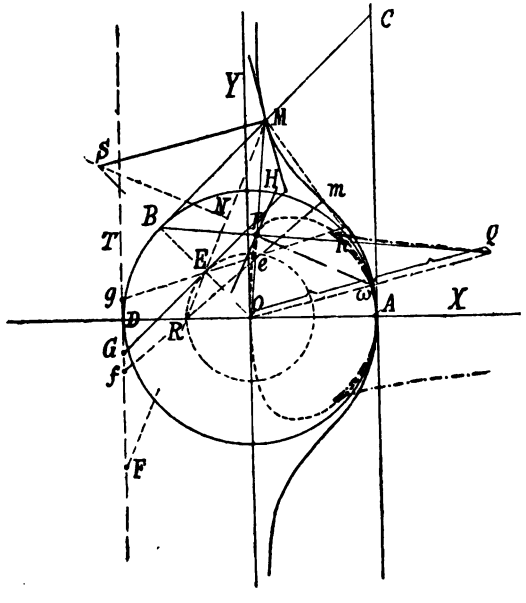
Le lieu de M est donc une cubique circulaire.

On peut démontrer géométriquement que ce lieu est une ***cissoïdale***. En effet, menons la tangente T au point D diamétralement opposé à A. Les droites OC et BD étant perpendiculaires à AB sont parallèles, et si l'on mène par le milieu M de BC une parallèle à BD, elle passera par les milieux E, R des droites OB, OD et rencontrera T en un point F tel que RF = ME (les triangles FDR et MBE sont égaux). Or, le point E décrit la circonférence de centre O et de rayon $\frac{1}{2}r$, et l'on a RM = FE;

Digitized by Google

donc M décrit la cissoïdale du point R par rapport à la circonférence $(O, \frac{1}{2}r)$ et à la droite T.

II. Lorsque F s'éloigne indéfiniment sur T, M s'éloigne indéfiniment de OX en se rapprochant continuellement de OY, car les points F et M sont à des distances égales de la perpendiculaire abaissée du milieu de



RE sur OA. On arrive à la même conclusion en faisant tendre la droite BC vers T.

Si l'on écrit l'équation (1) sous forme homogène :

$$4x(x^2+y^2) = r^2(3x+r),$$

on voit immédiatement que les droites

$$x = 0, \quad y = x\sqrt{-1}, \quad y = -x\sqrt{-1}$$

sont des asymptotes.

Donc les droites isotropes menées par O sont des asymptotes, et O est un *foyer* de la cissoïdale.

Le point R est un point isolé de la courbe, et deux points d'inflexion correspondent à $x = \frac{1}{2}r$.

III. Cherchons la tangente au point M. L'angle ARM, égal à OAC,

Digitized by Google

vaut la moitié de l'angle AOB; par suite, la vitesse angulaire de RM tournant autour de R vaut la moitié de celle de OB tournant autour de O ou de celle de la tangente BM tournant autour de son centre instantané B. Donc, si les vitesses sont tournées de 90° autour de leurs points d'application, on peut représenter la vitesse de circulation de M autour de B par MB, et celle de M autour de R par le segment MN $= \frac{1}{2}$ MB. La règle du quadrilatère des vitesses nous conduit alors à élever en N une perpendiculaire NS sur MN, en B une perpendiculaire OB à MB; ces perpendiculaires se coupent en un point S de la normale MS.

On peut aussi appliquer la méthode des transversales réciproques, due à M. de Longchamps. Si m est un second point de la cissoïdale, et que la droite Rm coupe la petite circonférence en e, T en f, on a fR $= em$. Il en résulte que les droites Ff, Mm, transversales réciproques du triangle REe coupent le côté Ee en deux points g et h tels que E$g = eh$. Lorsque le point m se rapproche indéfiniment de M, Ee a pour limite la tangente EG en E au cercle REe; donc T et la tangente en M doivent intercepter sur la tangente EGH des segments égaux EG = HE(*).

IV. Soit P l'intersection de la polaire de M par rapport au cercle donné, avec la droite OM. Comme on a OP. OM $= r^2$, le point P décrit la courbe inverse de la cubique circulaire (M), le pôle étant en O.

De l'équation (1), en faisant $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, on déduit l'équation polaire de la courbe (M) :

$$4\rho^3 \cos \varphi - 3 r^2 \rho \cos \varphi - r^3 = 0;$$

puis, en remplaçant ρ par $\frac{r^2}{\rho}$, celle de la courbe (P) :

$$\rho^3 + 3 r\rho^2 \cos \varphi - 4 r^3 \cos \varphi = 0;$$

enfin, on déduit de là l'équation de la même courbe (P) en coordonnées rectangulaires :

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3rx) - 4r^3x = 0.$$

Cette ligne est donc une quartique bicirculaire.

Les tangentes aux points M et P ont des directions symétriques par rapport à OM.

(*) Le lieu du point H est traité dans la question 334 (Barbarin) (*Mathesis*, 1886 (1), VI, p. 229).

Digitized by Google

V. La droite BP enveloppe une courbe qu'on peut considérer soit comme la polaire réciproque de la ligne (M), soit comme l'antipodaire de la ligne (P).

Le point de contact Q de BP peut donc s'obtenir, soit par l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire abaissée du centre O sur la tangente MH, soit en menant par O une droite OωQ dont le milieu ω se trouve sur la normale Pω à la courbe (P).

Remarque. La polaire du point O par rapport à la ligne (M) est indiquée, en partie, sur la figure en trait mixte.

BIBLIOGRAPHIE.

Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre, à l'usage des Classes supérieures de la section scientifique des Athenées et des Collèges, par C. Bergmans, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur honoraire. Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée. Gand, Hoste, 1898. (In-8° de 293 pages; autographie). Prix : 5 francs.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1894, et a été analysée sommairement dans *Mathesis*, 1895, (2), V, p. 18. Le but de l'auteur est de mettre à la portée des jeunes gens qui se préparent aux examens d'entrée des écoles spéciales belges, les théories nouvelles (ou les procédés nouveaux d'exposition des théories anciennes) relatives aux matières du programme d'arithmétique et d'algèbre de la première et de la seconde scientifique des athénées. On trouve, en outre, dans son livre, 22 séries d'exercices qui permettent aux élèves de faire preuve d'initiative personnelle. Quelques petites notices biographiques, en piquant la curiosité des lecteurs, ont pour but de les engager à compléter leur bagage scientifique par l'étude d'ouvrages plus étendus sur l'arithmétique et sur l'algèbre.

La nouvelle édition contient une trentaine de pages de plus que la première.

Considérations sur le postulatum d'Euclide, par M. G. Tarry. Paris, 1897, (15 pages in-8; imprimé chez M. Gauthier-Villars).

Ce petit opuscule contient : 1° La démonstration des deux théorèmes de Legendre sur la somme des angles dans un triangle. 2° Le raisonnement analysé et critiqué, dans le § I de la note intitulée : *Deux nouvelles démonstrations du postulatum d'Euclide*, p. 25 de ce volume de *Mathesis*. 3° Quelques remarques sur ce que M. Tarry appelle la *géométrie du plan isotrope* et ses relations possibles avec un cas-limite de la géométrie cayleyenne.

Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les Nombres et les Lignes trigonométriques par E. Mougin, professeur au Collège de Blois. Blois, Migault; Bruxelles, Schepens, 1898 (38 p. petit in-4° carré). Prix : fr. 1,25.

Sommaire : 1° Logarithmes de 1 à 10000 (3 pages). 2° Logarithmes des sinus

Digitized by Google

cosinus et cotangentes de minute en minute pour un quadrant (18 pages). 3° Des notices explicatives et deux tables de parties proportionnelles (7 pages). 4° Des formules mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, mécanique) et physiques (cosmographie, physique et chimie) (4 pages).

Les tables sont disposées d'une manière condensée très ingénieuse, trop ingénieuse peut-être.

Notions d'Algèbre à l'usage des classes élémentaires, par E. Colart, professeur à l'athénée royal et à l'École Industrielle de Huy. Bruxelles, Castaigne, 1898 (In-12 de 132 p., cartonné). Prix :

Cet ouvrage est spécialement destiné aux écoles moyennes de filles et aux écoles industrielles. Voici les matières qui y sont traitées :

Première partie. 1. Notations algébriques. 2. Transformation des égalités. 3. Théorie des proportions. Partages proportionnels. 4. Résolution des équations et des problèmes à une inconnue. 5. Applications : intérêt simple, escompte, mélanges et alliages. 6. Résolution de deux équations à deux inconnues.

Deuxième partie. I. *Calcul algébrique.* 1. Définitions. 2. Valeur numérique des polynomes. 3-5. Addition, soustraction, multiplication, division. 6. Plus grand commun diviseur et moindre multiple. 7. Fractions algébriques. II. *Équations et problèmes du premier degré* à une, à deux, ou à plus de deux inconnues. III. *Équations et problèmes du second degré.* 1. Carrés et racines carrées. 2. Résolution des équations du second degré.

Il y a des exercices à la suite de la plupart des chapitres du livre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 971.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 216).

Soit P *un point donné dans le plan d'une ellipse* E. *Une sécante quelconque menée par* P *coupe* E *aux deux points* A, B ; *soit* N *le point de concours des normales à* E *en* A *et* B, *et soient* C *et* D *les pieds des deux autres normales issues de* N. *Démontrer que* : 1° *la corde* CD *enveloppe une parabole qui touche les axes de* E (*Si* P *est sur l'un de ces axes,* CD *passe par un point fixe*) ; 2° *Le pôle de la corde* CD *décrit une hyperbole équilatère* ; 3° *Trouver le lieu du point de rencontre des cordes* AB *et* CD. *Dans le cas où* P *est sur l'un des axes de* E, *ce lieu est une hyperbole ;* 4° *Dans la même hypothèse, le point* N *décrit une conique et le centre de l'hyperbole équilatère passant par les points* A, B, C, D *décrit également une conique.* (Déprez).

Digitized by Google

Solution par M. Cl. Servais. La droite CD joint les projections, sur les axes de E, du symétrique du pôle de AB par rapport au centre O de E. AB passant par un point fixe P, ce symétrique décrit une droite *l*, et CD enveloppe une parabole (Q) tangente aux axes. La droite AB rencontre les axes en deux points, qui sont les projections du symétrique par rapport à O, du pôle de CD. Ce symétrique décrit une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de E. Le pôle de CD décrit donc une courbe identique. Si le point P est sur un axe, la droite *l* est perpendiculaire à cet axe, et la corde CD passe par le pied de cette perpendiculaire. Dans ce cas, les droites AB et CD engendrent deux faisceaux projectifs, et leur point d'intersection décrit une conique. Si AB est parallèle à l'une des diagonales du rectangle des axes, CD est aussi parallèle à cette droite; la conique est donc une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes.

Si la position de P est quelconque, le faisceau décrit par AB est projectif à la série des pôles de ces droites, ou de leurs symétriques; ce faisceau est donc projectif à la série des projections de ces derniers points sur un axe, ou bien projectif à la série des tangentes CD à la parabole (Q). Le lieu du point d'intersection de AB et CD, est donc une cubique ayant P pour point double; les tangentes en ce point sont les rayons du faisceau, correspondant aux tangentes menées de P à la parabole (Q).

Cette courbe passe par les projections du point P sur les axes. Les rayons du faisceau P qui sont parallèles aux tangentes correspondantes de la parabole, sont les parallèles menées de P aux diamètres conjugués égaux de E, et le diamètre passant par P. Les asymptotes de la cubique sont donc parallèles à ces droites.

Pour le lieu décrit par N, voir Salmon, *Sections coniques*, p. 569. Les coordonnées du centre de l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, D sont

$$x_1 = \frac{a^2}{c^2}\, x_0, \quad y_1 = -\frac{b^2}{c^2}\, y_0 ,$$

(x_0, y_0) étant les coordonnées du point N. Ce centre et le point N décrivent donc des courbes, qui se correspondent dans une transformation linéaire.

Solution par MM. Barisien, Gillet, Bastin, Cristesco, Droz Farny *et* J. Jonesco. Soient Q (α, β), R (α', β') les pôles des cordes AB, CD

Digitized by Google

et x, y les coordonnées de N. Les équations des cordes AB, CD étant

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0, \quad \frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}-1=0,$$

celle de l'hyperbole d'Apollonius de N est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}-1\right)=0. \qquad (1)$$

En l'identifiant avec

$$c^2xy+b^2x\mathrm{Y}-a^2y\mathrm{X}=0, \qquad (2)$$

on trouve d'abord, le terme indépendant étant nul, $\lambda=1$; ensuite,

$$\alpha\alpha'=-a^2, \quad \beta\beta'=-b^2, \qquad (3)$$

$$\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'}{c^2}=-\frac{\alpha+\alpha'}{\mathrm{Y}}=\frac{\beta+\beta'}{\mathrm{X}}. \qquad (4)$$

Si la corde AB tourne autour d'un point P (p, q), son pôle Q parcourt la polaire de P ; on a donc

$$\frac{p\alpha}{a^2}+\frac{q\beta}{b^2}=1, \qquad (5)$$

d'où, en éliminant α et β au moyen des relations (3),

$$\frac{p}{\alpha'}+\frac{q}{\beta'}+1=0, \text{ ou } \alpha'\beta'+p\beta'+q\alpha'=0. \qquad (6)$$

Le point R décrit donc une hyperbole qui a pour asymptotes les parallèles aux axes coordonnés menées par le symétrique de P par rapport à l'origine O.

Si l'on tire de (6) la valeur de β' pour la porter dans l'équation de la droite CD, on trouve

$$\frac{\alpha'^2x}{a^2}+\left(\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}-1\right)\alpha'-p=0; \qquad (7)$$

l'équation de l'enveloppe de CD s'obtient en égalant à zéro le discriminant de (7) par rapport à α'. On trouve après quelques transformations

$$\frac{\sqrt{-px}}{a}\pm\frac{\sqrt{-qy}}{b}=\pm 1;$$

cette enveloppe est donc une parabole qui touche les axes coordonnés aux points symétriques des projections de P par rapport à O.

Digitized by Google

Cependant, si P est sur l'un des axes coordonnés, par exemple sur Ox, on a $q = 0$; alors l'équation (6) donne $\alpha' = -p$. Le point Q glisse donc sur une droite perpendiculaire à Ox, et CD tourne autour du pôle de cette ligne.

L'équation du lieu décrit par l'intersection des cordes AB, CD s'obtient en éliminant α, β, α', β' entre les équations de ces droites et les relations (3) et (5). On trouve

$$(qx - py)\,[b^2x\,(x - p) - a^2y\,(y - q)] = a^2b^2\,(x - p)\,(y - q);$$

le lieu est donc une cubique, qui se réduit à l'hyperbole

$$p\,(b^2x^2 - a^2y^2) - b^2\,(a^2 - p^2)\,x - a^2b^2p = 0,$$

si P est situé sur le grand axe de E.

Le lieu de N, lorsque P est sur l'axe des x, s'obtient en éliminant α, β, α', β' entre les équations (3), (4) et $p\alpha = a^2$; il a donc pour équation

$$a^2p\,(p^2 - a^2)^2\,X^2 + b^2p\,(p^2 + a^2)^2\,Y^2 - c^2\,(p^2 - a^2)^2\,X - c^4p\,(p^2 - a^2)^2 = 0.$$

C'est un cercle si $p^2 = a^2\left(\dfrac{a \pm b}{a \mp b}\right)$.

Le centre (x_0, y_0) de l'hyperbole d'Apollonius du point (X,Y) a pour coordonnées

$$x_0 = \frac{a^2}{c^2}X, \quad y_0 = -\frac{b^2}{c^2}Y;$$

par suite, ce point et N décrivent des courbes dont l'une se déduit facilement de l'autre.

Question 1060.

Voir *Mathesis* (2) t. VI, p. 80).

On donne une hyperbole équilatère et deux points A, B *de la courbe. Par ces points, on fait passer une circonférence quelconque qui rencontre la conique en deux autres points* C, D. *Trouver le lieu des secondes extrémités des cordes* CC', DD' *de cette circonférence lorsque ces droites sont parallèles à* AB, *ou à une asymptote, ou à un axe de l'hyperbole. Cas particuliers où les points* A *et* B *sont confondus, ou diamétralement opposés ou situés sur une parallèle à l'axe.* (H. Brocard).

Digitized by Google

Solution par M. R. Buysens. La perpendiculaire m élevée à la corde AB en son milieu, est le lieu du centre de la circonférence variable. Lorsque CC′ est parallèle à AB, le point C′ est le symétrique du point C et le lieu cherché est la courbe symétrique de l'hyperbole donnée par rapport à la droite m. — Si les points A et B sont situés sur une parallèle à un axe, le lieu du point C′ se confond avec la courbe donnée.

Les cordes AB et CD sont également inclinées sur les axes ; le milieu M de CD décrit le diamètre parallèle à m ; la perpendiculaire élevée en M à la corde CD coupe m au centre I du cercle variable. Appelons X, Y les points à l'infini des asymptotes, Z le point à l'infini de CD. Les ponctuelles (M), (I) étant perspectives par rapport à un point de la droite de l'infini, il en résulte que les faisceaux perspectifs X (I), Z (M) engendrent une droite n parallèle à m ; donc : *la corde* CD *rencontre le diamètre parallèle à une asymptote sur une droite fixe perpendiculaire à* AB. Cette droite est en même temps le lieu de l'extrémité C′ de la corde CC′ parallèle à l'autre asymptote. Car les droites n et CD étant également inclinées sur IX, l'un des ponts de rencontre C_1 de n et du cercle, est tel que CC_1 est perpendiculaire à IX ; par suite, C_1 et C′ sont identiques. — Si les points A et B sont diamétralement opposés, le lieu est le diamètre perpendiculaire à AB. Lorsque les points A et B sont situés sur une parallèle à l'un des axes, le lieu est une parallèle à l'autre axe ; en effet, les ponctuelles superposées (M) et (I) projectives au faisceau de cercles sont projectives entre elles et ont un seul point double à l'infini. Cela montre en outre que le segment MI est constant.

Désignons par V, W les points à l'infini des axes de l'hyperbole, par Z_1 le point à l'infini de AB. Les faisceaux Z (M), V (I), sont perspectifs et le point de rencontre L de deux rayons ZM et VI décrit une droite l parallèle à m ; donc *la corde* CD *rencontre le diamètre parallèle à un axe de l'hyperbole sur une droite fixe perpendiculaire à* AB. Si l'on mène la corde CC′ parallèle à l'autre axe, l'extrémité C′ sera le point d'intersection des droites WC et Z_1L. Le lieu cherché correspond donc à la courbe donnée dans une homologie (affinité) de centre W, d'axe l, dans laquelle Z et Z_1 sont deux points homologues. — Lorsque les points A et B sont situés sur une parallèle à un axe, la corde CC′ parallèle à cet axe, est la corde CD même ; la corde CC′ parallèle à l'autre axe vaut 2 MI ; le lieu du point C′ est donc congru à la courbe donnée.

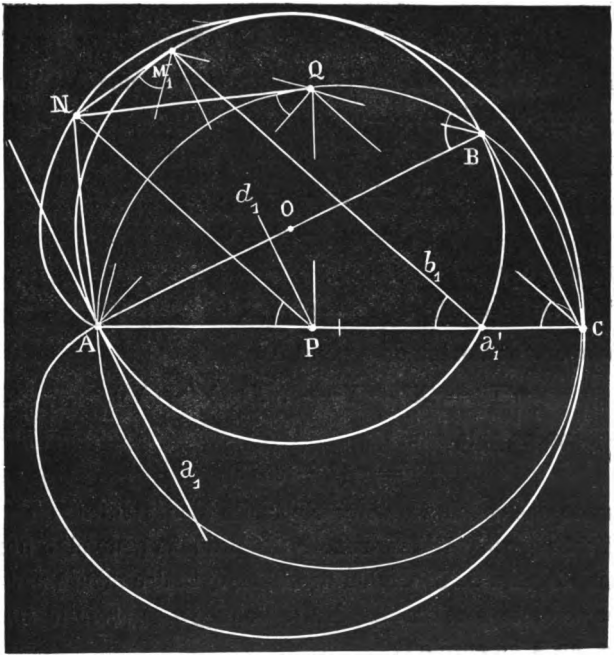
Digitized by Google

Question 1121.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 213).

Une droite fixe a est tangente en A *à un cylindre de révolution dont l'axe est vertical ; soit a la génératrice du cylindre passant par le point diamétralement opposé à* A.

Une droite mobile b s'appuie sur a et a' et est constamment horizontale ; elle engendre un paraboloïde qui rencontre le cylindre suivant une



certaine courbe gauche. Trouver le lieu décrit par la tangente à cette courbe sur le plan horizontal mené par A. (Stuyvaert).

Solution par M. Audibert. Prenons ce dernier plan pour celui des xy, pour origine le centre O du cercle de rayon r, section droite du cylindre, et pour axe des x la droite OA. Les équations de la tangente a seront

$$x = r, \quad z = py.$$

et celles d'une des droites b,

$$y = m(x + r), \quad z = t.$$

Digitized by Google

Pour que b rencontre a, nous aurons la condition $m = \frac{t}{2rp}$, et l'équation du paraboloïde s'écrira

$$xz + rz - 2rpy = 0. \tag{1}$$

La tangente à la courbe gauche au point (x, y, z) sera représentée par les deux équations

$$zX - 2rpY + (x + r)Z + rz - 2rpy = 0,$$
$$xX + yY = r^2;$$

pour $Z = 0$, la première se réduit à

$$zX - 2rpY + rz - 2rpy = 0.$$

L'élimination de z à l'aide de (1) réduit le problème à l'élimination de x et de y entre les équations

$$Xy - Y(x + r) - xy = 0,$$
$$Xx + Yy - r^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

La résultante est

$$r^2Y^2 = (X^2 + Y^2 - r^2)\,[(X - r)^2 + Y^2],$$

ou, en transportant l'origine au point A;

$$r^2Y^2 = (X^2 + Y^2 + 2rX)\,(X^2 + Y^2),$$

et, en coordonnées polaires,

$$\rho = r(1 - \cos\theta),$$

qui représente une conchoïde de cercle facile à construire.

Généralisation par M. Jeřabek. Nous prenons pour plan horizontal de projection le plan de la section droite du cylindre menée par A; soit O le centre de cette section. La droite donnée a se projette suivant la tangente a_1 en A au cercle O.

Au paraboloïde considéré par M. Stuyvaert, nous substituons celui qui a pour plan directeur le plan horizontal et pour directrice la tangente a projetée suivant a_1 et une génératrice quelconque a' du cylindre projetée en a'_1. Considérons la génératrice b de ce paraboloïde qui a pour projection horizontale la corde a'_1M_1 de la base. M_1 est la projection du point M où b rencontre le cylindre; ce point M_1 appartient donc à la courbe gauche, intersection du cylindre avec le paraboloïde.

Il s'agit de trouver le lieu de la trace horizontale N de la tangente MN à cette courbe.

Digitized by Google

MN est l'intersection des plans tangents menés en M au cylindre et paraboloïde. Le premier plan a pour trace horizontale la tangente en M_1 au cercle O. Le second plan passant par b, sa trace horizontale est parallèle à la droite a'_1M_1. Ce plan doit aussi contenir la seconde génératrice d du paraboloïde passant par M ; or, le second plan directeur du paraboloïde étant le plan a_1a, la projection horizontale de d est la parallèle d_1 menée par M_1 à a_1, et sa trace horizontale est le point de rencontre P de d_1 avec la génératrice Aa'_1 contenue dans le plan horizontal. D'après cela, la trace horizontale du plan tangent mené en M au paraboloïde est parallèle à a'_1M_1 et passe par P.

Le lieu (N) peut donc être construit de la manière suivante : Mener une corde quelconque a'_1M_1 du cercle O par le point fixe a'_1 ; tirer par M_1 une parallèle M_1P à a_1, puis par P une parallèle à a'_1M_1 ; cette dernière parallèle rencontre la tangente menée en M_1 au cercle O en un point N du lieu cherché.

Traçons le diamètre AOB. Les angles Aa'_1M_1 et AM_1N ayant la même mesure, l'angle $APN = AM_1N$; donc les quatre points A, N, P, M_1 appartiennent à une même circonférence. Soit Q le point où la perpendiculaire élevée en P sur Aa_1 coupe la corde BM_1. A cause des angles droits APQ et AM_1Q, le quadrilatère AM_1QP est inscriptible ; donc Q appartient à la circonférenee ANM_1P. Il résulte de là que les angles APM_1 et AQM_1 sont égaux, et comme le premier est constant, il en est de même du second. Par suite, le lieu de Q est une circonférence passant par les points A et B.

Cette circonférence est tangente à la droite NQ ; car l'angle $AQN = AM_1N = ABQ$. Enfin, l'angle ANQ est droit, AQ étant un diamètre de la circonférence $APQM_1N_1$. Donc le lieu (M) est la podaire de la circonférence AQB par rapport à l'un de ses points ; c'est donc une cardioïde.

Dans la question de M. Stuyvaert, a'_1 coïncide avec B, et le cercle AQB se confond avec le cercle O.

Le lieu est encore une cardioïde quand on remplace a par une tangente au cylindre qui s'appuie sur la tangente menée par a'_1 au cercle (O).

Autre solution par M. Buysens.

Digitized by Google

Question 1158.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 55).

D'un point M *on mène les deux tangentes à une ellipse; soient* P *et* Q *les points de contact. Trouver le lieu du point* M *tel que la circonférence* MPQ *soit tangente à l'ellipse.* (E. Lemoine).

Solution par MM. E. N. Barisien, H. Lez, Morin de la Pillière, Deprez et Soons. Si α et β sont les coordonnées du point M, l'équation de PQ est

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0. \tag{1}$$

Celle de la seconde sécante d'intersection du cercle MPQ avec l'ellipse est de la forme

$$b^2\alpha x - a^2\beta y + \mu = 0. \tag{2}$$

L'équation générale d'une conique qui passe par les points d'intersection des droites (1) et (2) avec l'ellipse, s'écrit

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)(b^2\alpha x-a^2\beta y+\mu)=0. \tag{3}$$

Les conditions pour que cette conique passe par le point M et soit un cercle sont

$$\lambda + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + \mu = 0, \quad \lambda b^2 + b^4\alpha^2 = \lambda a^2 - a^4\beta^2.$$

D'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{c^2}, \quad \mu = -\frac{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}.$$

L'équation de la seconde sécante (2) devient donc

$$b^2\alpha x - a^2\beta y = \frac{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}. \tag{4}$$

Si cette droite est tangente à l'ellipse, l'équation (4) doit être identique avec celle de la tangente au point d'angle excentrique φ :

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab, \tag{5}$$

ce qui donne les relations

$$\frac{b\alpha}{\cos\varphi} = \frac{-a\beta}{\sin\varphi} = \frac{ab(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations donne immédiatement

$$(\alpha^2+\beta^2)^2 = \frac{c^4\alpha^2}{a^2} + \frac{c^4\beta^2}{b^2}.$$

Digitized by Google

Le lieu de M est donc la quartique, podaire du centre de l'ellipse dont les sommets sont les points de rebroussement de la développée de l'ellipse donnée.

Remarque. Si l'ellipse donnée est remplacée par la parabole $y^2 = 2px$, le lieu du point M est la parabole

$$\beta^2 + 2p\alpha - 2p^2 = 0. \qquad \text{(Barisien.)}$$

Solution par MM. Droz Farny *et* Déprez. Si le point M est quelconque, la circonférence MPQ coupera l'ellipse en deux autres points P′ et Q′ et l'on sait que le pôle M′ de P′Q′ appartient aussi à la circonférence. OM et OM′ sont symétriquement disposés par rapport au grand axe et

$$OM \cdot OM' = c^2.$$

Si la circonférence MPQ devient tangente à l'ellipse, P′Q′ est tangente à cette courbe au point M′. Soit m le symétrique de M′ par rapport au grand axe; on a alors

$$OM \cdot Om = c^2.$$

Le lieu cherché est donc une inverse de l'ellipse par rapport à son centre comme pôle.

QUESTIONS D'EXAMEN.

857. Démontrer les formules (*) :

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi - \cos^4\varphi = \sin^2\varphi,$$

$$1 + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 2\sqrt{2}\cos\varphi\cos(45^\circ - \varphi).$$

$$1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 2\varphi = \sec 2\varphi, \quad \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi(1 - \operatorname{tg}\varphi)} = 1 + \cot\varphi,$$

$$\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi} = 1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi, \quad \sin 3\varphi + \sin^3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

$$1 - \cos\varphi\cos 3\varphi + 4\sin^4\varphi = 5\sin^2\varphi.$$

$$\frac{1 + \sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}\varphi)^2, \quad \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{1}{2}(\cot^2\varphi - 1),$$

(*) Nous empruntons ces exercices à une dissertation de M. Fuhrmann, intitulée : *Beiträge zur Transformation algebraisch-trigonometrischer Functionen, erster Teil.* (Voir Programme du *Realgymnasium auf der Burg, Königsberg*, 1898).

Digitized by Google

$$4(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) = 1 + 3\cos^2 2\varphi,$$

$$\cos^8\varphi + \sin^8\varphi = \cos^2 2\varphi + \frac{1}{8}\sin^4 2\varphi.$$

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos n\varphi + \sin n\varphi) = \cos(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi$$

$$\frac{\sin 3\varphi \cos^3\varphi - \cos 3\varphi \sin^3\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2 + \cos 4\varphi = 1 + 2\cos^2 2\varphi.$$

$$\cos\varphi + 3\cos 3\varphi - 4\cos^2\varphi \cos 3\varphi = 2\sin\varphi \sin 4\varphi.$$

$$(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a - \sin b)^2 - (\cos a - \cos b)^2 = 4\cos(a+b)\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = 2\sin(a+b)\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$\frac{(\sin^3 a - \sin^3 b)(\cos a + \cos b)}{\sin(a-b)}$$

$$= 1 + \cos a \cos b\,[1 - \cos(a+b) - \cos(a-b)\cos^2(a+b)].$$

$$\sin a \cos a + \sin b \cos b = \sin(a+b)\cos(a-b).$$

$$\frac{\sin^3 a \cos a + \sin^3 b \cos b}{\sin(a+b)} = \cos(a-b)(\sin^2 a + \sin^2 b) - \sin a \sin b.$$

$$\frac{\sin^3 a \cos b - \sin^3 b \cos a}{\sin(a-b)} = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin a \sin b \cos(a+b).$$

858. Deux points se meuvent sur une même circonférence de rayon R. Les espaces parcourus s, s', mesurés à partir d'un même point A de la circonférence et dans le même sens, sont exprimés en fonction du temps t par les formules

$$s = at^2 + bt + c, \quad s' = a't^2 + b't + c',$$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes données. Déterminer le point de rencontre de ces mobiles.

Équation du problème

$$at^2 + bt + c = a't^2 + b't + c' + 2n\pi R,$$

n étant un nombre entier. Soit $a \gtrless a'$; on doit avoir

$$n \geqq \frac{4(a-a')(c-c') - (b-b')^2}{8(a-a')\pi R}, \text{ si } a > a'$$

Digitized by Google

$$n \leqq \frac{4(a-a')(c-c') - (b-b')^2}{8(a-a')\pi R}, \text{ si } a < a'.$$

Pour chaque valeur de n satisfaisant à cette inégalité, on trouve deux valeurs de t.

Si $a = a'$, $b \gtrless b'$, on a

$$t = \frac{c - c' - 2n\pi R}{b' - b}, \text{ etc.}$$

859. Résoudre et discuter l'équation

$$8(1-\mu)\cos y \sin^2\frac{y}{2} - 3\cos^3 y + 2(\mu - 2) = 0,$$

μ étant un paramètre variable.

En posant $\cos y = x$, $2(\mu - 1) = \lambda$, on ramène l'équation à

$$(2\lambda - 3)x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0.$$

Pour que x soit réel, λ doit être compris entre 1 et 6. Si $1 < \lambda < \frac{5}{2}$, une seule valeur de x est comprise entre -1 et $+1$; si $\frac{5}{2} < \lambda < 5$, les deux valeurs absolues de x sont plus grandes que l'unité; si $5 < \lambda < 6$, les deux valeurs de x sont comprises entre -1 et $+1$.

(*Supplemento al Periodico di Matematica*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1188bis (*). On donne un triangle ABC et une transversale variable Δ tournant autour d'un point fixe P et coupant BC, CA, AB en A′, B′, C′. On considère le quadrilatère déterminé par ces quatre droites. 1° Quelle est l'enveloppe de toutes les droites de Newton (droites passant par les milieux de AA′, BB′, CC′)? 2° Le lieu des points de Monge (intersections des circonférences de diamètres AA′, BB′, CC′) est une quartique bicirculaire qui, lorsque le point P coïncide avec le centre du cercle circonscrit à ABC, dégénère en deux cercles, le cercle circonscrit à ABC et son cercle des neuf points. (A. Droz Farny.)

1189. On considère les triangles variables formés par un point M d'une ellipse donnée et les deux foyers F et F′ de l'ellipse. La polaire

---

(*) La question 1188, p. 216, doit être supprimée, M. Stuyvaert en ayant donné d'avance une solution, dans la Note mathématique insérée dans *Mathesis*, (2) t. VII, p. 195.

Digitized by Google

du centre de l'ellipse par rapport au cercle inscrit dans le triangle MFF' enveloppe une courbe dont l'aire est

$$U = \frac{\pi c^2}{8}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}.$$ (E. N. Barisien).

1190. On considère les paraboles tangentes à trois droites données a, b, c. Soient F le foyer de l'une de ces courbes, et A, B, C les points où elle touche a, b, c.

1° Démontrer que les droites FA, FB, FC pivotent autour de trois points fixes (Soons). 2° On mène à la parabole considérée une quatrième tangente d parallèlement à une direction fixe; D étant le point de contact, le rayon FD tourne autour d'un point fixe (Plücker). 3° Les cordes DA, DB, DC tournent autour de trois points fixes (J. N.). 4° Le point D décrit une conique. (J. N.).

1191. Etant donnés une ellipse E et le point de rencontre Q des tangentes menées aux sommets A et B, soit p la polaire d'un point P par rapport à E et soit q la polaire de Q par rapport au cercle Σ passant par le centre O de E et par les points de rencontre de p avec E. On demande le lieu de P et celui du centre de Σ, lorsque p et q sont parallèles ou perpendiculaires. (Davidoglou.)

1192. Etant donné un cycle, ou cercle dirigé, dont les tangentes sont par suite dirigées, on mène d'un point M les deux tangentes MA, MB, sur lesquelles on prend, en tenant compte des signes, $\overline{AC} = \overline{BD} = k$: la droite CD où n sera la *transformée* du point M. En changeant k en $-k$, on aura une autre droite l, qui sera appelée la *primitive* du point M, et M sera le *point transformé* de l. Démontrer que, si un point M et une droite m sont *associés*, c'est-à-dire si M est sur m, les éléments transformés n et N sont aussi associés.

Généraliser par projection conique; et montrer que, sauf la question de réalité, la construction obtenue se rapporte à la corrélation plane la plus générale. (G. Fontené).

Digitized by Google

JEAN-NICOLAS MISTER (1832-1898).

Nous avons la douleur d'apprendre aux lecteurs de *Mathesis* la mort de l'un de nos plus chers collaborateurs : JEAN-NICOLAS MISTER est décédé inopinément à Gand, le 19 octobre 1898, quelques jours après avoir été admis à l'éméritat.

MISTER naquit à Verviers, le 29 décembre 1832. Après de brillantes études moyennes dans sa ville natale, il remporta, au concours général de 1851, le second prix d'honneur pour les Mathématiques, puis il entra comme élève à l'École du Génie civil de Gand. Il en sortit, en 1856, avec le grade d'Ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées.

De 1856 à 1867, il fut successivement professeur de mathématiques supérieures aux collèges communaux de Bouillon et de Nivelles, puis à l'athénée royal de Bruges. Les succès éclatants de ses élèves dans les concours et les examens attestèrent l'excellence de son enseignement et attirèrent sur lui l'attention du Gouvernement.

En 1867, il fut nommé répétiteur d'Analyse et de Géométrie descriptive à l'Université de Gand et chargé d'initier à la pratique de l'enseignement les élèves de l'École Normale des Sciences. Il remplit ces fonctions avec un zèle et un dévouement qui ne se démentirent jamais et il conquit un grand ascendant sur la jeunesse des Écoles.

En 1880, nommé professeur ordinaire à l'Université, il organisa pour les élèves des Écoles spéciales de Gand qui n'appartenaient pas à la section des Ponts et Chaussées, un cours d'Analyse, de Géométrie analytique et de Mécanique rationnelle. Il le fit avec un succès complet : il sut trouver pour ces élèves, parfois imparfaitement préparés, la voie la plus courte et la plus facile pour leur enseigner les parties des hautes Mathématiques indispensables à l'ingénieur.

Pendant près d'un quart de siècle, MISTER a été examinateur aux Écoles spéciales de Gand et correcteur du Concours général de l'enseignement moyen. C'était un examinateur consciencieux, tout entier à sa tâche, toujours bienveillant, même lorsqu'il devrait reprendre un récipiendaire trop peu préparé. Dans le doute, il inclinait toujours à l'indulgence.

MISTER a publié, par l'autographie, deux éditions successives de ses cours à l'Université; on lui doit aussi un assez grand nombre d'articles (dont beaucoup sans signature) publiés dans *Mathesis*, et, au début de sa carrière, dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique* et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Depuis janvier 1881, jusqu'en octobre 1893 inclusivement, il a corrigé, par dévouement à notre œuvre, les épreuves de *toutes* les livraisons de *Mathesis*.

Le souvenir de MISTER vivra parmi ceux qui l'ont connu, maîtres et élèves, le souvenir d'un examinateur indulgent, d'un répétiteur habile, d'un professeur entièrement dévoué à ses devoirs, d'un savant modeste, d'un ami sûr, fidèle et plein d'aménité. Il a légué sa belle bibliothèque mathématique à l'École préparatoire du Génie civil de Gand.

(P. M. et J. N.)

Digitized by Google

*SUR LES POLYÈDRES RÉGULIERS,

par J. Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Gand.

I. Etant donné un polyèdre régulier P, si l'on construit le polyèdre convexe Q ayant pour sommets les centres des faces de P, il est aisé de voir que ce nouveau polyèdre est également régulier.

A chaque face de P correspond un sommet de Q, et à chaque face de Q, un sommet de P ; à chaque arête de l'une des figures correspond dans l'autre une arête qui lui est perpendiculaire. Les deux polyèdres sont concentriques.

II. On peut recommencer la construction qui a été indiquée, en partant d'un polyèdre régulier Q' semblable à Q et on en déduira un polyèdre régulier P', semblable à P, puisqu'il a le même nombre de faces.

Nous dirons que *les polyèdres réguliers* P et Q (abstraction faite de leur grandeur relative et de leur position) *sont corrélatifs*. Ainsi, le cube et l'octaèdre régulier sont corrélatifs; le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier sont corrélatifs ; le polyèdre corrélatif du tétraèdre régulier est le tétraèdre régulier lui-même.

III. Soient O le centre commun des deux polyèdres dont il a été question au n° I; A un sommet de P; M, N, K,.... les centres des faces de ce polyèdre qui forment l'angle solide A ; AB l'arête commune aux faces de centres M et N, AC l'arête commune aux faces de centres N et K. Il est à remarquer que MN, NK,.... sont les côtés de la face de Q qui correspond au sommet A du premier.

On verra que l'angle MON, que nous appellerons *angle au centre* du nouveau polyèdre, est le supplément de l'angle dièdre formé par les faces de centres M et N ; que les droites MN et NK sont perpendiculaires respectivement aux plans OAB et OAC, et que, par suite, l'angle MNK est le supplément du dièdre formé par les plans OAB, OAC.

Donc, chaque angle dièdre d'un polyèdre régulier est le supplément d'un angle au centre du polyèdre corrélatif, et l'angle formé par les plans de deux angles au centre correspondant à deux arêtes consécutives du premier polyèdre est le supplément de l'angle formé par deux arêtes consécutives du second polyèdre.

IV. Menons la droite OA ; elle est perpendiculaire au plan de la face MNK... et passe par son centre S. Menons encore la droite OT, T étant

Digitized by Google

le milieu de AB ; cette droite rencontre MN en son milieu V et lui est perpendiculaire.

Les triangles OMA, OMS sont semblables, ainsi que les triangles OMT, OMV. On en déduit les proportions suivantes :

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OM}{OS}=\frac{MA}{MS},\quad \frac{OM}{OV}=\frac{OT}{OM}=\frac{MT}{MV}.$$

Désignons par R, r et ρ respectivement le rayon de la sphère circonscrite au premier polyèdre, celui de la sphère inscrite et celui de la sphère tangente aux milieux des arêtes de ce polyèdre ; soient R', r' et ρ' les éléments analogues du second polyèdre ; R_f, r_f les rayons des cercles circonscrit et inscrit à une face du premier polyèdre ; R'_f le rayon du cercle circonscrit à une face du second polyèdre, a' une arête de ce dernier polyèdre ; les proportions précédentes deviennent alors :

$$\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{R_f}{R'_f}; \qquad (1)$$

$$\frac{r}{\rho'}=\frac{\rho}{R'}=\frac{2r_f}{a'}. \qquad (2)$$

Les proportions (1) et (2) restent vraies, si les éléments R', r', ρ', R'_f, a' se rapportent à un polyèdre quelconque semblable au second, c'est-à-dire à un polyèdre régulier corrélatif quelconque de celui dans lequel on a pris les éléments R, r, ρ, R_f, r_f.

V. *Conséquences.* I. D'après les proportions (1), *si deux polyèdres réguliers corrélatifs sont inscrits dans la même sphère, ils sont aussi circonscrits à la même sphère et les cercles circonscrits aux faces des deux polyèdres sont égaux.*

II. D'après les proportions (2), *si une sphère est tangente aux milieux des arêtes d'un polyèdre régulier et si l'on construit le polyèdre régulier corrélatif circonscrit à la même sphère, la sphère tangente aux milieux des arêtes de ce nouveau polyèdre sera en même temps circonscrite au premier ; en outre, le diamètre du cercle inscrit à une face du dernier est égal à une arête du premier.*

III. Si les deux polyèdres réguliers corrélatifs sont des tétraèdres réguliers égaux, les proportions (2) deviennent (a désignant une arête d'un de ces tétraèdres) :

$$r=\frac{\rho}{R}=\frac{2r_f}{a}.$$

Digitized by Google

SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES ENTIERS,

par M. le Dr F. Mariantoni.

1. M. Barisien a fait observer (*) que la *la 9ième puissance d'un nombre quelconque a le même chiffre des unités que ce nombre.* On peut établir, plus précisément, que *la cinquième puissance de tout nombre entier a le même chiffre des unités que ce nombre.* En effet, cela est évident si ce chiffre est 0 ou 5; ces deux cas étant exclus, si a est un nombre premier avec 10, puisque le nombre des nombres premiers avec 10 et moindres que 10 est égal à 4, on a, par le théorème d'Euler,

$$a^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

et par suite

$$a^5 \equiv a \pmod{10}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si, enfin, $a = 2^k a_1$ (a_1 premier avec 10 et $k \geq 1$), on a, par ce qui précède,

$$a_1^5 \equiv a_1 \pmod{10}$$

et, en outre, puisque $2^5 = 3.10 + 2$,

$$2^{5k} \equiv 2^k \pmod{10};$$

donc

$$a^5 \equiv a \pmod{10}. \qquad \text{C. Q. F. D.}(**)$$

2. Nous ajouterons une observation qui découle très facilement du théorème cité d'Euler. Si x est la base d'un système de numération quelconque, pour tout nombre premier avec x, on a la propriété

$$a^{\varphi(x)+1} \equiv a \pmod{x}$$

c'est-à-dire : *un nombre premier avec x et sa puissance* $\varphi(x)+1$ *ont le même dernier chiffre*(***). Une propriété analogue, pour les nombres premiers avec x, aura lieu pour un exposant $n < \varphi(x)+1$ seulement dans le cas où x n'a pas de racines primitives, c'est-à-dire quand $x = p^\alpha$ ou $x = 2 \cdot p^\alpha$ (p nombre premier impair, $\alpha \geq 2$).

(*) Voir *Mathesis* de mai 1898, p. 113.

(**) Il suffit de chercher le chiffre terminal de 2^5, 3^5,... 9^5 au moyen de multiplications successives pour démontrer directement cette formule. La démonstration précédente ne sert que d'introduction aux développements qui vont suivre.

(***) φ est la fonction de Gauss, bien connue dans la théorie des nombres. J'entends par dernier chiffre d'un nombre le chiffre des unités; les deux derniers chiffres sont celui des unités et celui des dizaines, etc.

Digitized by Google

Voyons maintenant à quelle condition le théorème susciste pour un nombre a qui n'est pas premier avec x. Soit k le produit de tous les facteurs premiers de x qui appartiennent à a, de manière que $a = ka_1$, a_1 étant premier avec x. Puisque

$$a_1^{\varphi(x)+1} \equiv a_1 \text{ (mod. } x),$$

on aura aussi

$$a^{\varphi(x)+1} \equiv a \text{ (mod. } x),$$

si

$$k^{\varphi(x)+1} \equiv k \text{ (mod. } x).$$

Mais $k^{\varphi(x)} - 1$ ne pourrait être divisible que par un diviseur p de x qui n'entrerait pas dans k, et alors k devrait être divisible par l'autre facteur q de x. Donc : *la condition nécessaire pour que la dernière congruence se vérifie est qu'on puisse décomposer x en deux facteurs p et q, de manière que k soit multiple de q et, à la fois, premier avec p. Cette condition est aussi suffisante,* car si elle est remplie, la différence $k^{\varphi(x)} - 1$, égale à $\left\{k^{\varphi(q)}\right\}^{\varphi(p)} - 1$ est (en vertu du théorème d'Euler) divisible par p. Dans le cas de $x = 10$, cela a parfaitement lieu, mais peut bien ne pas avoir lieu en beaucoup de cas, comme, par exemple, si $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ et $a = p_1^{\alpha'} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots$ ($p_1, p_2, \ldots q_1, q_2 \ldots$ nombres premiers) avec $\alpha' < \alpha_1$;

3. Le théorème d'Euler peut servir à établir des propriétés des puissances des nombres, analogues aux précédentes, mais relatives à *un groupe quelconque de chiffres terminaux* de la base et de la puissance. Je me bornerai ici au cas où l'on considère les deux derniers chiffres seulement. Puisque $\varphi(100) = 40$, si a est un nombre premier avec 10, on a :

$$a^{41} \equiv a \text{ (mod. } 100)$$

ou : *tout nombre premier avec 10 et sa 41ième puissance ont les mêmes deux derniers chiffres.* Si a n'est pas premier avec 10, il sera en général de la forme $2^m.5^n.a_1$ (a_1 premier avec 10), et pour que la propriété précédente ait lieu, on doit avoir

$$(2^m.5^n)^{41} \equiv 2^m.5^n \text{ (mod. } 100).$$

Mais on reconnaît aisément que cela ne peut arriver que dans ces deux cas : 1° $m \geq 2$, $n = 0$; 2° $m = 0$, $n \geq 2$; on peut donc conclure : *tout nombre qui ne se termine pas par un seul zéro a les mêmes deux derniers chiffres que sa 41ième puissance.* Ajoutons que *dans ce cas, 41 n'est pas l'exposant le plus petit qui donne lieu à une semblable propriété, car 100 n'a pas de racines primitives.*

Digitized by Google

Rien n'empêcherait de continuer ces applications dont nous avons donné un essai; cette question constituerait un exercice utile pour les étudiants.

Sondrio, juillet 1898.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE;

par M. G. DE ROCQUIGNY.

1. Le produit de deux nombres triangulaires consécutifs quelconques est : 1° la moitié d'un triangulaire; 2° la somme de deux triangulaires.

On a, en effet,

$$\frac{(n-1)\,n}{2}\cdot\frac{n\,(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2\,(n^2-1)}{2}$$

ou

$$T_{n-1}\,.\,T_n=\frac{1}{2}T_{n^2-1}.$$

On a, également

$$\frac{(n-1)\,n}{2}\cdot\frac{n\,(n+1)}{2}=\frac{(n^2-n-2)\,(n^2-n)}{8}+\frac{(n^2+n-2)\,(n^2+n)}{8}$$

ou

$$T_{n-1}.\,T_n=T_{T_{n-1}-1}+T_{T_n-1}.$$

2. Le produit de deux nombres triangulaires consécutifs de rang pair (impair) est le double d'un triangulaire.

On a :

$$\frac{(n-1)\,n}{2}\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}=\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2-\frac{n\,(n+1)}{2}$$

ou

$$T_{n-1}\,.\,T_{n+1}=2.\,T_{T_n-1}.$$

3. Soient quatre nombres triangulaires consécutifs quelconques, le produit des extrèmes est égal au produit des moyens diminués chacun d'une unité. On a

$$\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\cdot\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}=\left[\frac{(n-1)\,n}{2}-1\right]\cdot\left[\frac{n\,(n+1)}{2}-1\right]$$

ou

$$T_{n-2}\,.\,T_{n+1}=(T_{n-1}-1).\,(T_n-1).$$

Digitized by Google

4. Tout carré d'un multiple de 3 est la somme d'un triangulaire, d'un carré et d'un pentagonal :

$$(3.n)^2 = \frac{2n(2n+1)}{2} + n^2 + \frac{3.(2n)^2 - 2n}{2}.$$

5. Si l'on ajoute deux nombres pentagonaux consécutifs, on obtient une somme 1° de trois trangulaires; 2° de trois carrés :

$$\frac{3n^2 - n}{2} + \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2} = n^2 + n^2 + (n+1)^2.$$

6. Désignons par N la somme de trois carrés entiers consécutifs,

$$N = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2.$$

Si a est plus grand que 3, N est toujours au moins d'une seconde manière la somme de trois carrés *effectifs*. En effet, a ne peut être que de l'une des formes :

$$3n-2, \quad 3n-1, \quad 3n,$$

et l'on a

$$(3n-2)^2 + (3n-1)^2 + (3n)^2 = n^2 + (n+1)^2 + (5n-2)^2;$$
$$(3n-1)^2 + (3n)^2 + (3n+1)^2 = (n-1)^2 + (n+1)^2 + (5n)^2;$$
$$(3n)^2 + (3n+1)^2 + (3n+2)^2 = (n-1)^2 + n^2 + (5n+2)^2.$$

7. On peut généraliser le n° 6 et écrire

$$(3n-2r)^2 + (3n-r)^2 + (3n)^2 = n^2 + (n+r)^2 + (5n-2r)^2.$$
$$(3n-r)^2 + (3n)^2 + (3n+r)^2 = (n-r)^2 + (n+r)^2 + (5n)^2.$$
$$(3n)^2 + (3n+r)^2 + (3n+2r)^2 = (n-r)^2 + n^2 + (5n+2r)^2.$$

8. Tout bicarré entier est la somme d'un cube et de deux carrés :

$$n^4 = [2(n-1)]^2\,[2(n-1)]^3 + [2(n-1)^2 - n^2]^2.$$

Soit $n = 3$, on a

$$81 = 16 + 64 + 1.$$

En faisant $n = 2a^2 + 1$, on a

$$(2a^2+1)^4 = (4a^4 - 4a^2 - 1)^2 + (2a)^4 + (2a)^6$$

ou, un bicarré somme d'un carré, d'un bicarré et d'une puissance sixième.

Digitized by Google

9. La somme (différence) du bicarré et du cube d'un entier quelconque > 1 peut toujours être exprimée par trois nombres triangulaires *effectifs*:

$$n^4 + n^3 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}.$$

$$n^4 - n^3 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2}.$$

Soit $n = 2$:

$$2^4 + 2^3 = 24 = 3 + 6 + 15$$
$$2^4 - 2^3 = 8 = 1 + 6 + 1.$$

10. La somme (différence) des puissances sixième et cinquième d'un entier quelconque > 1 peut toujours être exprimée par trois nombres triangulaires *effectifs* :

$$n^6 + n^5 = \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}$$
$$+ \frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2-1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n-1)}{2}.$$

$$n^6 - n^5 = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2}$$
$$+ \frac{(n^3-n^2)(n^3-n^2+1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n+1)}{2}.$$

Soit $n = 2$;

$$2^6 + 2^5 = 96 = 15 + 66 + 15,$$
$$2^6 - 2^5 = 32 = 1 + 10 + 21.$$

11. On a aussi

$$n^6 + n^5 = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$+ \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n+1)}{2} + \frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2-1)}{2}.$$

12. Le nombre $\frac{n^9 - n^2}{n-1}$ est la somme de trois triangulaires. On a

$$\frac{n^9 - n^2}{n-1} = n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + n^8$$
$$= \tfrac{1}{2} n^3 (n^3 - 1) + \tfrac{1}{2} (n^4 - n^2 - n)(n^4 - n^2 - n - 1,$$
$$+ \tfrac{1}{2} (n^4 + n^3 + n^2 + n)(n^4 + n^3 + n^2 + n - 1).$$

Digitized by Google

13. La différence des puissances huitième et sixième d'un entier quelconque > 1 est une somme de deux triangulaires :

$$n^8 - n^6 = \tfrac{1}{2}(n^4 - n^3 - n^2 + n)(n^4 - n^3 - n^2 + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n^4 + n^3 - n^2 - n)(n^4 + n^3 - n^2 - n + 1).$$

14. La différence des puissances sixième et quatrième d'un entier quelconque > 1 est une somme de deux triangulaires :

$$n^6 - n^4 = \tfrac{1}{2}(n^3 + n^2 - n)(n^3 + n^2 - n - 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n^3 - n^2 - n)(n^3 - n^2 - n + 1).$$

15. Le nombre $n^{2\alpha} \mp n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta}$ est la somme de trois triangulaires.

On a :

$$n^{2\alpha} + n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta} = \frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2} + \frac{n^\beta(n^\beta \mp 1)}{2}$$
$$+ \frac{(n^\alpha + n^\beta)(n^\alpha + n^\beta \mp 1)}{2},$$

$$n^{2\alpha} - n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta} = \frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2} + \frac{n^\beta(n^\beta \mp 1)}{2} + \frac{(n^\alpha - n^\beta)(n^\alpha - n^\beta \mp 1)}{2}.$$

16. Tout bicarré entier est la demi-somme d'un carré, d'un cube et de la moitié d'un triangulaire :

$$n^4 = \left\{ n^2 + (2n-1)^3 + (n-1)^2 [2.(n-1)^2 - 1] \right\} . \tfrac{1}{2}.$$

Soit $n = 3$:

$$3^4 = 81 = \tfrac{1}{2}(9 + 125 + 28) = \frac{162}{2} = 81.$$

SOMMATION D'UNE SÉRIE;

par M. A. Boutin.

Soit à sommer la série

$$y = u_0 + \frac{u_1 x}{1} + \frac{u_2 x^2}{1.2} + \frac{u_3 x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{u_n x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

$u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ étant les termes successifs d'une suite récurrente. Soit, pour simplifier, l'échelle de récurrence

$$(1) \qquad u_n + \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} + \gamma u_{n-3} = 0.$$

La différentiation donne :

$$y' = u_1 + u_2 x + \cdots + \frac{u_{n+1} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

Digitized by Google

$$y'' = u_2 + u_3 x + \cdots + \frac{u_{n+2} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

$$y''' = u_3 + u_4 x + \cdots + \frac{u_{n+3} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

d'où

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = u_3 + \alpha u_2 + \beta u_1 + \gamma u_0 + \cdots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}(u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n) + \cdots,$$

mais, en vertu de (1), les coefficients des différentes puissances de x sont identiquement nuls, et par suite, la fonction y satisfait à l'équation différentielle

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \tag{2}$$

dont l'intégration est classique.

L'équation caractéristique est

$$\rho^3 + \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que les racines de cette équation, réelles et inégales, soient r', r'', r'''.

L'intégrale générale de (2) est

$$y = ae^{r'x} + be^{r''x} + ce^{r'''x}$$

a, b, c, étant des constantes arbitraires que l'on détermine par la condition que y, y', y'' se réduisent respectivement à u_0, u_1, u_2 pour $x = 0$, ce qui donne, pour déterminer a, b, c :

$$a + b + c = u_0, \quad ar' + br'' + cr''' = u_1, \quad ar'^2 + br''^2 + cr'''^2 = u_2.$$

Exemple. Soit à sommer :

$$y = 1 - \operatorname{cotg}\alpha . x + \frac{2\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}{1.2} x^2 - \frac{4\operatorname{cotg}^3\alpha + 3\operatorname{cotg}\alpha}{1.2.3} x^3 + \cdots$$

Les coefficients de $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ satisfaisant à la relation

$$u_n = -2u_{n-1}\operatorname{cotg}\alpha + u_{n-2},$$

ici, y satisfait à l'équation différentielle

$$y'' + 2y'\operatorname{cotg}\alpha - y = 0. \tag{3}$$

Digitized by Google

L'équation caractéristique est

$$\rho^2 + 2\rho \operatorname{cotg} \alpha - 1 = 0$$

dont les racines sont $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ et $-\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$. L'intégrale générale de (3) est donc

$$y = ae^{x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha} + be^{-x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha};$$

mais on doit avoir

$$a + b = 1, \qquad a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha - b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = -\operatorname{cotg} \alpha,$$

d'où $a = b = \frac{1}{2}$, et par suite

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha} + e^{-x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha}\right)$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Sur la généralisation et la dualisation des propriétés de la parabole, par* M. L. Ripert. I. Une parabole P est une conique tangente à la droite i de l'infini en un point I, qui est son centre. De cette considération découlent toutes ses propriétés *descriptives;* on peut déduire toutes ses propriétés *métriques* de l'adjonction à P d'un cercle (c'est-à-dire d'une conique passant par les points cycliques I_1 et I_2 de la droite i).

II. J'appelle (pour la dénommer) *quasi-parabole ponctuelle* une conique C quelconque, considérée spécialement par rapport à une de ses tangentes n en un point N, abstraction faite du centre, des diamètres et des points à l'infini. Dans ces conditions, le point N sera dit *quasi-centre* de C; toutes les cordes passant par N seront des *quasi-diamètres.* Soient, sur la droite n (substituée à i) deux points réels ou imaginaires N_1 et N_2. Celui des quasi-diamètres qui est tel qu'à son extrémité S (*quasi-sommet*), la tangente passe par le conjugué harmonique de N par rapport à (N_1, N_2) sera dit *quasi-axe.* Soit t une tangente quelconque à C; elle coupe la tangente en S en un point G et n en un point k, dont le conjugué harmonique, par rapport à (N_1, N_2) est un point L. La droite GL passe par un point fixe F, situé sur le quasi-axe et qui sera dit *quasi-foyer* de C. La polaire de F par rapport à C sera dite *quasi-directrice.* La droite qui joint un point M de C où la tangente est m au conjugué harmonique du point mn par rapport à (N_1, N_2) sera dite *quasi-normale* en M, etc.

Digitized by Google

Dans la parabole P, SF est le quart du paramètre $2p$. En d'autres termes, un *cercle-unité* O (de rayon égal à l'unité) étant donné(*), si l'on mène OI qui rencontre le cercle en E, puis OS dont le point à l'infini est U, puis EU qui coupe SF en D, le *nombre* $2p$ est donné par :

$$\frac{p}{2} = \frac{SF}{SD} = \frac{SF.DI}{SD.FI} = (FDSI).$$

De même, pour la quasi-parabole ponctuelle C, une conique passant par N_1, N_2 et ayant pour pôle de n un point O étant prise pour *conique-unité*, si l'on mène ON qui rencontre cette conique en E, puis OS qui rencontre n en U, puis EU qui coupe SF en D, le nombre $2p = 4\,(FDSN)$ sera dit le *quasi-paramètre ponctuel* de C, etc.

III. Considérons *la même* conique C, par rapport au point N où la tangente est n, et à cause de cette permutation de (n, N) avec (N, n), appelons-la *quasi-parabole tangentielle*. La tangente n sera dite *quasi-centrale*; tous les points de n seront de *quasi-diamétraux*. Soient, passant par N, deux droites réelles ou imaginaires n_1 et n_2. Celui des quasi-diamétraux qui est tel que la seconde tangente menée par lui à C a son point de contact S sur la conjuguée harmonique de n par rapport à (n_1, n_2) sera dit *quasi-axial*. Soit T un point quelconque de C; sa jonction avec S est une droite g, et sa jonction avec N est une droite K, dont la conjuguée harmonique par rapport à (n_1, n_2) est une droite l. Le point gl est sur une droite fixe f, passant par le quasi-axial et qui sera dite la *quasi-focale* de C. Le pôle de f par rapport à C sera dit point *quasi-directeur*. Le point d'intersection d'une tangente m à C en M avec la conjuguée harmonique de la droite MN par rapport à (n_1, n_2) sera dit *quasi-normal sur m*, etc.

Pour la quasi-parabole C, une conique tangente à n_1, n_2 et ayant pour polaire de N une droite o étant prise pour *conique-unité*, si on lui mène de on une tangente e, puis que l'on prenne le point os dont la jonction à n est une droite u, puis le point eu qui, joint à sf, donne une droite d, le *nombre*

$$2P = 4\,\frac{\sin(s, f)}{\sin(s, d)}\,\frac{\sin(d, n)}{\sin(f, n)} = 4\,(fdsn)$$

sera dit le *quasi-paramètre tangentiel* de C, etc.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Digitized by Google

IV. Les définitions qui précèdent permettent d'étendre, en les doublant par dualité, à une conique quelconque C, considérée successivement comme quasi-parabole ponctuelle ou tangentielle, toutes les propriétés spéciales de la parabole. Je citerai, comme exemples d'application, dans le tome VIII de *Mathesis*, les questions 1155, 1160, 1161 (p. 104), 1168, 1172.

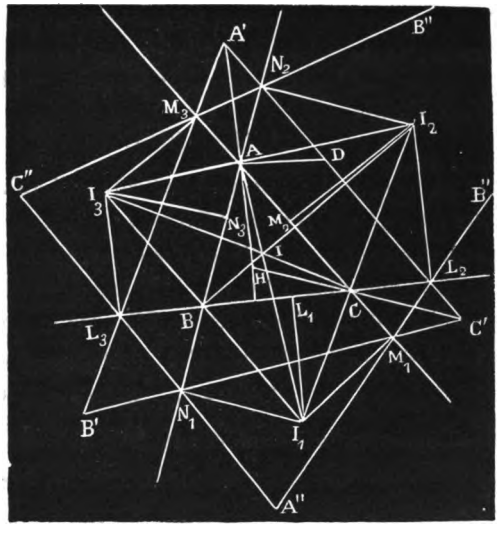
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 789.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 240).

Soient (L, M, N), (L_1, M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2), (L_3, M_3, N_3) *les points de contact des côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *avec le cercle inscrit* I *et avec les cercles ex-inscrits* I_1, I_2, I_3. *Exprimer, en fonction des éléments du triangle* ABC, *les côtés et les aires du triangle formé par les droites* M_1N_1, N_2L_2, L_3M_3 *ou par les droites* N_2M_3, L_3N_1, N_1L_2, *suffisamment prolongées.*

(J. Neuberg).



Solution par M. Déprez.

1° Soit A'B'C' le triangle formé par les droites M_1N_1, N_2L_2, L_3M_3. Les propriétés de ce triangle, qui avaient fait l'objet du concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1873, ont été démontrées par M. Gambey (N. A. M., 1874, p. 43) et par M. Neuberg (N. C. M , t. I, p. 44.) Les démonstrations suivantes sont un peu différentes.

On voit d'abord facilement que les deux triangles A'B'C' et $I_1I_2I_3$ ont

Digitized by Google

leurs côtés parallèles. Il en résulte que les angles de A'B'C' ont pour expression

$$A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

En convenant de désigner par (M, XY) la distance du point M à la droite XY, on trouve aisément

$$(A, A'C') = AN_2 \sin AN_2C' = (p - c)\cos\frac{B}{2}, \quad (A, A'B') = (p - b)\cos\frac{C}{2};$$

donc

$$\frac{(A, A'C')}{(A, A'B')} = \frac{p - c}{p - b}\,\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\cot\frac{1}{2}B}\,\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

Cherchant de même les rapports des distances du point B aux côtés de l'angle B', et du point C aux côtés de C', on trouve que les droites AA', BB', CC' concourent en un point H dont les coordonnées normales, dans le triangle A'B'C', sont proportionnelles à $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\sin\frac{1}{2}B$ ou à cos A', cos B', cos C'. Donc H est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Il résulte de là que l'angle

$$AA'N_2 = \tfrac{1}{2}\pi - B' = \tfrac{1}{2}B;$$

mais l'angle

$$BN_2C' = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B,$$

donc l'angle

$$A'AN_2 = BN_2C' - AA'N_2 = \tfrac{1}{2}\pi - B$$

et la droite AH est perpendiculaire à BC. Ainsi, *le centre d'homologie des triangles* A'B'C' *et* ABC *est le centre du cercle circonscrit au premier de ces triangles et l'orthocentre du second.*

Si la parallèle à BC par A rencontre A'C' en D, le triangle AN_2D est isoscèle; donc $AD = AN_2 = BL_1$. On en conclut l'égalité des triangles A'AD et I_1L_1B; par suite $AA' = I_1L_1 = r_a$. Ainsi

$$AA' = r_a, \quad BB' = r_b, \quad CC' = r_c.$$

D'après un théorème connu

$$AH = 2R + r - r_a;$$

on en conclut

$$R' = A'H = A'A + AH = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

Connaissant les angles et le rayon du cercle circonscrit, il est facile de calculer les autres éléments des triangles A'B'C'.

Digitized by Google

Le centre d'homothétie des triangles A'B'C', $I_1I_2I_3$ est leur point de Lemoine ; car les coordonnées normales de ce centre, dans l'un ou l'autre de ces triangles, sont proportionnelles aux distances des côtés homologues, distances qui ont pour expression

$$AM_1 \cos\tfrac{1}{2}A, \quad BN_2 \cos\tfrac{1}{2}B, \quad CM_3 \cos\tfrac{1}{2}C ;$$

elles sont donc proportionnelles à sin A', sin B', sin C'.

2° Soit A''B''C'' le triangle formé par les droites N_2M_3, L_3N_1, M_1L_2. Les équations de ces droites, en coordonnées normales, sont

$$x \sin^2\tfrac{1}{2}A + y \cos^2\tfrac{1}{2}B + z \cos^2\tfrac{1}{2}C = 0,$$
$$x \cos^2\tfrac{1}{2}A + y \sin^2\tfrac{1}{2}B + z \cos^2\tfrac{1}{2}C = 0,$$
$$x \cos^2\tfrac{1}{2}A + y \cos^2\tfrac{1}{2}B + z \sin^2\tfrac{1}{2}C = 0.$$

Or, si les côtés d'un triangle ont pour équations

$A_1x+B_1y+C_1z=0$, $A_2x+B_2y+C_2z=0$, $A_3x+B_3y+C_3z=0$,

l'aire T et les longueurs a', b', c' des côtés sont données par les formules :

$$T = \frac{4RS^2\Delta^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \quad a' = \frac{4RS\Delta\sqrt{P_1}}{\Delta_2\Delta_3}, \text{ etc.}$$

où l'on a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

$$P_1^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - 2B_1C_1 \cos A - 2C_1A_1 \cos B - 2A_1B_1 \cos C, \text{ etc.}$$

Dans la question proposée,

$$P_1 = \sqrt{1 - \sin B \sin C}, \quad \Delta = \frac{p^2 - 4R^2 - 2Rr}{4R^2},$$

$$\Delta_3 = \frac{c\,(2R - r_c)}{2R}, \quad \Delta_2 = \frac{b\,(2R - r_b)}{2R}, \quad \Delta_1 = \frac{a\,(2R - r_a)}{2R} ;$$

par conséquent,

$$S'' = \frac{S\,(p^2 - 4R^2 - 2Rr)^2}{2R(2R - r_a)(2R - r_b)(2R - r_c)},$$

$$a'' = \frac{a\,(p^2 - 4R^2 - 2Rr)\sqrt{1 - \sin B \sin C}}{(2R - r_b)\,(2R - r_c)}, \quad \text{etc.}$$

Remarques. 1° Les droites A'A et L_1I_1 étant égales et parallèles,

Digitized by Google

$A'L_1$ est parallèle à AI_1 et par suite perpendiculaire à $B'C'$; donc les droites $A'L_1$, $B'M_2$, $C'N_3$ sont les hauteurs du triangle $A'B'C'$. Les coordonnées barycentriques de leur point de concours, dans le triangle ABC, sont : $(b+c)\cos A$, $(c+a)\cos B$, $(a+b)\cos C$.

2° Les droites I_1L_1, I_2M_2, I_3N_3 concourent au centre O' du cercle circonscrit au triangle $I_1I_2I_3$. Les triangles AM_2N_3, AN_2M_3 étant symétriques par rapport à la bissectrice I_2I_3 de l'angle BAC, le diamètre O'A du cercle circonscrit au premier est dirigé suivant une hauteur du second; donc le triangle $A''B''C''$ est homothétique à l'antipodaire de O' par rapport au triangle ABC.

3° Les triangles ABC, $A''B''C''$ ont pour centre d'homologie l'orthocentre de ABC.

L'axe d'homologie des triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$ passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

×Question 944.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 128).

Par un point fixe P *pris à l'intérieur d'un cercle donné* (C), *on mène une corde quelconque dont les extrémités sont* A *et* B. *On décrit sur* PA *comme diamètre un cercle* (Σ) *qui rencontre le cercle* (C) *en un second point* A', *et sur* PB *comme diamètre, un cercle* (Σ') *qui rencontre* (C) *en un second point* B' :

1° *le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures à* (Σ) *et* (Σ') *est une ligne droite*;

2° *le lieu des points de rencontre des tangentes communes extérieures avec la tangente intérieure aux mêmes cercles* (Σ) *et* (Σ') *est un cercle.*

3° *la droite* A'B' *passe par un point fixe.*

4° *les deux tangentes communes extérieures et la droite* A'B' *passent par un même point.*

5° *les droites* AA' *et* BB' *se coupent sur une droite fixe.*

6° *le point de rencontre des droites* AB' *et* BA' *est un point fixe.*

(E. N. Barisien).

Solution par MM. A. Droz Farny et Jean Jonesco. I (5°). Les deux droites AA' et BB' se coupent en S. AA' étant l'axe radical des cercles

Digitized by Google

(C) et (Σ), BB′ celui des cercles (C) et (Σ′), le point S appartient à l'axe radical des cercles (Σ) et (Σ′); d'où

$$SA.SA' = SB.SB' = \overline{SP}^2.$$

Le lieu du point S est donc l'axe radical du cercle (C) et du point P, donc une perpendiculaire sur OP, à une distance OM telle que $\overline{OM}^2 - R^2 = (OM - OP)^2$. Soit $OP = d$; alors

$$OM = \frac{d^2 + R^2}{2d}.$$

II (1°). Soient c' et c'' les milieux de PA et PB. Ces deux points sont sur une circonférence fixe de rayon $\frac{1}{2}R$ ayant son centre en O′, point milieu de OP. Les deux tangentes extérieures se coupant en L, les points c', c'', P, L sont harmoniques. Le lieu de L est la polaire de P par rapport à cette circonférence; c'est donc une droite perpendiculaire sur O′P à une distance O′M telle que

$$O'M.O'P = \frac{R^2}{4}, \quad O'M = \frac{R^2}{2d}, \quad OM = \frac{R^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{R^2 + d^2}{2d}.$$

Les lieux 1 et 5 fournissent la même droite.

III (2°). Si deux circonférences de rayons R′ et R″ sont tangentes extérieurement, on sait que la tangente commune intérieure comprise entre le point de contact et la tangente extérieure a pour longueur

$$t = \sqrt{R'R''}.$$

On aura donc ici

$$t^2 = Pc'.Pc'' = \frac{R^2}{4} - \overline{PO'}^2 = \frac{R^2 - d^2}{4}.$$

Le lieu cherché est donc une circonférence de centre P et de rayon $t = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - d^2}$.

IV (4°). Le point S appartenant à l'axe radical des deux circonférences Σ et Σ′, les points A′ et B′ sont antihomologues sur ces dernières et la droite A′B′ passe par le centre de similitude externe L de ces circonférences.

V (3° et 6°). Comme dans le quadrilatère inscrit AA′BB′ les paires de côtés opposés (AA′ et BB′) et (AB, A′B′) se croisent sur une droite fixe LMS, les diagonales AB′ et A′B se couperont en un point fixe π,

Digitized by Google

pôle de LMS par rapport à C. Ce point est situé sur PM. La droite A'B' coupe évidemment PM en un point fixe conjugué harmonique de P par rapport à π et à M.

Remarques. Les angles PA'A et PB'B étant droits, les cordes AA' et BB' enveloppent une ellipse ayant P et son symétrique par rapport au centre O comme foyers.

La droite qui joint les points de contact des deux cordes correspondantes AA' et BB' avec l'ellipse passe par un point fixe.

Solution analytique par MM. Bovy et Poort.

Question 1064.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 104).

On donne un triangle ABC *et une droite d. Soit* Σ *l'une quelconque des coniques passant par* A, B, C *et ayant son centre sur d. Trouver 1° le lieu du pôle de la corde* BC *de* Σ; *2° le lieu de l'intersection des normales menées à* Σ *en* B *et* C; *3° le lieu où la normale à* Σ *en* A *coupe une seconde fois la conique.* (H. Brocard).

Solution par M. Colart. 1° En prenant pour axes les droites AB et AC et posant $AC = b$, $AB = c$, on a pour équation générale des coniques circonscrites à ABC

$$y(y-b) + Bxy + Cx(x-c) = 0. \qquad (1)$$

La condition pour que le centre se trouve sur la droite $Mx + Ny + P = 0$ est

$$\begin{vmatrix} B & 2 & -b \\ 2C & B & -cC \\ M & N & P \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

D'ailleurs les équations des tangentes en B et C sont

$$by - Bcy - Cx(x-c) = 0, \quad b(y-b) + Bbx - Ccx = 0 \qquad (3)$$

L'élimination de B et C entre les équations (2) et (3) donne

$$2xy(Mc + Nb + 2P) - bc(Mx + Ny + P) = 0. \qquad (4)$$

Le lieu du pôle de BC est donc une hyperbole passant par les points d'intersection de la droite d avec AB et AC, et ayant ses asymptotes parallèles à AB et AC. On vérifie aussi que cette courbe passe par le

Digitized by Google

milieu de BC et que son centre se trouve sur la parallèle à d menée par A.

2° Si l'on prend pour axe des x la droite BC et pour axe des y la perpendiculaire en son milieu, on trouve, en opérant comme dans le 1°, que le lieu du point de rencontre des normales en B et C est une quartique. Si la droite d passe par le milieu de BC, cette quartique dégénère en une hyperbole passant par B et C et dont les asymptotes sont les perpendiculaires menées, par le milieu de BC, à la droite d et à la droite BC.

3° Si l'on prend pour axes les droites AB et AC, l'équation de la normale en A est

$$cC(y + x\cos A) = b(x + y\cos A). \qquad (5)$$

En éliminant B et C entre les équations (1), (2), (5), on obtient une équation du 6° degré.

Si la droite d passe par A et par le milieu de BC, c'est-à-dire si $P = 0$ et $Mc + Nb = 0$, la condition (2) se décompose en $B = 0$, et $BM + NCc = 0$; le lieu du second point d'intersection se compose alors de deux cubiques.

Ont résolu la même question M. E. Barisien et Déprez.

Question 1132.

(Voir *Mathesis* (2) t. VII, p. 213).

Par un point fixe I *du grand axe d'une ellipse donnée, on mène une corde arbitraire* AB *dont le pôle est en* P. *Montrer que*

1° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* PAB *est une ellipse.*

2° *L'enveloppe de ces ellipses, lorsque* I *se déplace sur le grand axe de l'ellipse donnée, se compose de deux ellipses.*

3° *Trouver le lieu du centre de gravité et du centre du cercle circonscrit du triangle* ABP. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. V. Cristesco (Cernavoda, Roumanie), Droz Farny et Déprez. Soient (α, β) les coordonnées du pôle P. Cherchons, dans le cas général, les coordonnées de l'orthocentre H, du centre de gravité G et du centre du cercle circonscrit O.

Orthocentre H. Si l'on mène d'un point P les tangentes PA, PB à une ellipse, on sait que l'orthocentre du triangle PAB se trouve sur la polaire du point P par rapport au cercle de Monge (voir *Mathesis* (1), X, page 207, question 652).

Digitized by Google

L'équation de cette polaire est

$$\alpha x + \beta y - (a^2 + b^2) = 0,$$

et celle de la perpendiculaire abaissée de P sur la corde de contact AB est

$$a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta = 0.$$

Les coordonnées de l'orthocentre H sont donc

$$x_H = \frac{\alpha(a^2b^2 + b^4 + c^2\beta^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \quad y_H = \frac{\beta(a^4 + a^2b^2 - c^2\alpha^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \qquad (1)$$

Centre de gravité G. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des points A, B. Si l'on élimine premièrement y, puis x, entre l'équation de l'ellipse et l'équation

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0$$

de la corde AB, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)\,x^2 - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0,\\ (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)\,y^2 - 2a^2b^2\beta y + b^4(a^2 - \alpha^2) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les équations (2) donnent

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \quad y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} \text{ (*)}$$

et, par suite, les coordonnées de G seront

$$\left.\begin{aligned}3x_G = x_1 + x_2 + \alpha = \alpha\left(1 + \frac{2a^2b^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}\right)\\ 3y_G = y_1 + y_2 + \beta = \beta\left(1 + \frac{2a^2b^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Centre O *du cercle circonscrit.* On sait que les points H, G, O sont en ligne droite, et que 2OG = GH. Par suite les coordonnées de O seront

$$2x_O = 3x_G - x_H, \quad 2y_O = 3y_G - y_H,$$

et si l'on tient compte de (1) et (3) on trouve

$$x_O = \frac{b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, \quad y_O = \frac{a^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}. \qquad (4)$$

(*) On trouve aussi les coordonnées du milieu de AB en combinant l'équation de AB avec celle de la droite OP. (J. N.)

Digitized by Google

Démontrons maintenant les propriétés énoncées.

1° Soient $(m, 0)$ les coordonnées du point fixe I. Si la polaire AB passe par le point $(m, 0)$, le pôle P se trouve sur la droite $\alpha = a^2 : m$, et les coordonnées de l'orthocentre H deviennent :

$$x = \frac{m(a^2b^2 + b^4 + c^2\beta^2)}{a^2b^2 + m^2\beta^2}, \quad y = \frac{\beta[(a^2 + b^2)m^2 - c^2a^2]}{a^2b^2 + m^2\beta^2}.$$

En éliminant β entre ces deux relations, on trouve le lieu de l'orthocentre :

$$m(a^2x^2 + b^2y^2) - [(a^2 + b^2)m^2 + a^2c^2]x + m(a^4 - b^4) = 0. \qquad (5)$$

2° Si l'on exprime que l'équation (5) a une racine double en m, on trouve que l'enveloppe des ellipses (5) a pour équation

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + a^4 - b^4)^2 - 4(a^4 - b^4)a^2x^2 = 0,$$

ou

$$a^2x^2 + b^2y^2 \pm 2a\sqrt{a^4 - b^4}\,x + a^4 - b^4 = 0.$$

3° Les relations (3) donnent par division

$$\beta = \frac{y}{x}\alpha;$$

en introduisant cette valeur de β dans l'une des relations (3), on trouve, après avoir remplacé α par $(a^2 : m)$, que le lieu du centre de gravité est

$$(b^2x^2 + a^2y^2)(a^2 - 3mx) + 2m^2b^2x^2 = 0.$$

Si l'on fait dans les relations (4) $\alpha = a^2 : m$, on obtient

$$x = \frac{b^2(a^4 + m^2c^2 + m^2\beta^2)}{2m(a^2b^2 + m^2\beta^2)}, \quad y = \frac{\beta(a^4 - m^2c^2 + m^2\beta^2)}{2(a^2b^2 + m^2\beta^2)}.$$

Tirons de la première de ces deux égalités la valeur de β, et substituons-la dans la dernière ; il vient, après avoir élevé au carré, pour le lieu du point O :

$$[(a^2 - m^2)x + b^2m]^2[a^2(a^2 + m^2 - 2mx) - b^2m^2] + (a^2 + m^2)^2b^2(b^2 - 2mx)y^2 = 0.$$

M. Degueldre a résolu la même question.

Digitized by Google

Question 1155.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, pp. 31 et 207).

On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC *d'un triangle et sont normales au troisième* BC. *Trouver* ... 3° *le lieu du foyer.* (J.N.)

Solution par M. J. Déprez. Soient M, N, P les points de rencontre de l'axe de l'une des paraboles avec les côtés BC, CA, AB; appelons S le sommet de la courbe, x, y et z les coordonnées normales du foyer F, $2p$ le paramètre, φ l'angle CMF. On a

$$x = \mathrm{FM}\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}, \qquad (1)$$

$$y = \frac{\mathrm{FS}}{\sin \mathrm{N}} = \frac{p}{2\sin(\varphi + \mathrm{C})}, \quad z = \frac{\mathrm{FS}}{\sin \mathrm{P}} = \frac{p}{2\sin(\varphi - \mathrm{B})}.$$

Entre ces trois équations, il faut éliminer p et φ. Les deux dernières donnent

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin(\varphi - \mathrm{B})}{\sin(\varphi + \mathrm{C})}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}}{z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C}};$$

$$\sin\varphi = \frac{y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}, \quad \cos\varphi = \frac{z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}.$$

Ensuite

$$p = \frac{2yz\sin\mathrm{A}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$x(z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C})^2 - yz\sin\mathrm{A}(y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}) = 0.$$

×QUESTIONS D'EXAMEN.

860. Résoudre et discuter l'équation

$$m\sin 2x - (m^2 - m + 2)(\sin x + \cos x) + 3m - 2 = 0.$$

On trouve

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)\sqrt{2}}{2}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

861. Si le cercle inscrit à un triangle ABC passe par le centre de gravité G, on a

$$5(a^2+b^2+c^2)=6(bc+ca+ab).$$

(E. N. Barisien).

M étant un point quelconque du plan ABC, on a

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{MG}^2.$$

Si M coïncide avec le centre I du cercle inscrit, on a

$$\overline{IA}^2=(p-a)^2+r^2,\cdots;\quad \text{de plus,}\quad \Sigma\overline{GA}^2=\frac{1}{3}\Sigma a^2,$$

et, par hypothèse, IG = r, etc.

862. On mène à une ellipse une tangente limitée en P et Q aux directrices; par P et Q, on mène les secondes tangentes. Trouver le lieu du point de rencontre de ces secondes tangentes. (Soons).

On cherche le lieu du pôle du troisième côté du triangle inscrit dont deux côtés passent par les foyers.

863. Soient A′, B′, C′, D′ les centres de gravité des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre. Si M et N sont deux points quelconques de l'espace, la somme (algébrique) des volumes des tétraèdres MNAA′, MNBB′, MNCC′, MNAA′ est nulle.

Si G est le centre de gravité de tétraèdre, la proposition revient à

$$MNGA+MNGB+MNGC+MNGD=0;$$

on a

$$(A, MNG)+(B, MNG)+(C, MNG)+(D, MNG)=0,$$

égalité connue.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1193. On considère une ellipse, un point fixe I du grand axe de l'ellipse et la corde PIP′ perpendiculaire au grand axe. Par le point I, on fait passer une corde variable MIM′. Montrer que l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points de chacun des triangles MM′P et MM′P′, décrivent chacun une ellipse. Cas où le point I est au centre ou à l'un des foyers de l'ellipse. (E. N. Barisien).

×**1194.** Les diagonales AC, BD d'un quadrilatère inscriptible ABCD se coupant en O, appelons T_1, T_2, T_3, T_4 les triangles OAB, OCD, OBC, ODA, et V_i, H_i, G_i le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le barycentre dans le triangle T_i. Cela posé :

Digitized by Google

1° Les figures $V_1V_2V_3V_4$, $G_1G_2G_3G_4$ $H_2H_5H_3H_4$ sont des parallélogrammes;

2° Les droites V_1H_5, V_2H_1, V_3H_4, V_4H_5 concourent en O et sont respectivement perpendiculaires à DC, AB, AD, CB;

3° Les droites V_1H_1, V_2H_2, V_3H_5, V_4H_4 se coupent en un point O'.

Les deux parallélogrammes $V_1V_5V_2V_4$, $H_1H_5H_2H_4$ sont donc doublement homologiques. (E. Lemoine).

×**1195.** Trouver les projections d'un triangle rectangle ABC, connaissant les projections de la bissectrice BD qui est ligne de plus grande pente du plan du triangle et sachant que C est dans le plan horizontal. (Soons).

1196. Etant donnés, sur une droite, trois points A, B, C et une origine O, si l'on calcule les quatrièmes proportionnelles, d'abord aux segments OA, OB, OC, puis aux segments OB, OC, OA, enfin à OC, OA, OB, la somme des droites obtenues n'est jamais égale à OA + OB + OC, quand les points A, B, C sont tous réels, mais la propriété peut exister si deux de ces points sont imaginaires conjugués.

Par tout point O du plan d'une cubique (non situé sur la courbe), on peut mener deux droites rencontrent la cubique en des points A, B, C, qui, avec le point O jouissent de la propriété ci-dessus; ou l'on n'en peut mener aucune. (M. Stuyvaërt).

Rectifications : 1° *Question* 1183 *p.* 216, au lieu de *symédianes*, lire *médianes*.

2° M. Barisien trouve que le lieu des points tels que le triangle formé par ce point et les extrémités de sa corde polaire par rapport à une ellipse donnée, ait son orthocentre sur l'ellipse, *est une sextique.* (*Mathesis* (2) VIII, p. 154). En réalité, *le lieu demandé est une ellipse concentrique à la proposée, ses axes sont dirigés suivant ceux de l'ellipse donnée*; l'équation du lieu est :

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (a^2 + b^2)^2 = 0$$

On trouve aussi l'équation :

$$c^4x^2y^2 - a^6y^2 - b^6x^2 = 0$$

mais cette équation n'est pas l'équation du lieu vrai, c'est l'équation du lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse donnée. (Déprez).

A mentionner : p. 232, les solutions de la question 1060 par MM. Soons, Barisien et Déprez; p. 236, la solution de la question 1158 par M. Gust. Gerard; p. 212, la solution de la question 1168 par M. Mars.

Digitized by Google

LA STROPHOIDE EST UNE SECTRICE ET UNE DUPLICATRICE;

Note par M. GINO LORIA, professeur à l'Université de Gênes.

On a déjà découvert un grand nombre de belles propriétés de la strophoïde et on a aussi indiqué bien des questions où elle rend des grands services. Mais je crois qu'on n'a pas encore remarqué qu'on peut l'appliquer à la trisection d'un angle, aussi bien qu'à la solution du problème de Délos; c'est-à-dire qu'elle appartient en même temps à la classe des « courbes sectrices » et à celle des « courbes duplicatrices ». C'est ce qu'on aperçoit par une étude attentive de deux passages de l'inépuisable correspondance de Chr. Huygens.

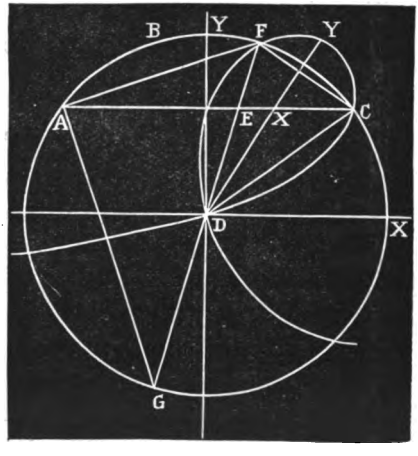


Fig. 1.

I. Dans la lettre adressée par le mathématicien allemand G. A. Kinner à Chr. Huygens le 18 juillet 1653, on lit (voir le t. I des *Œuvres complètes de Chr. Huygens*, 1888, p. 236) le procédé suivant pour diviser un angle en trois parties égales : « Soit (fig. 1) ABC l'arc donné; qu'on applique une règle passant par le centre D de cet arc de manière qu'elle coupe la corde AC en E et l'arc ABC en F de manière qu'on ait CE = CF. Je dis que l'arc CA est le triple de CF ».

Appelons, en effet, G la seconde extrémité du diamètre FD et joignons le point A aux points F et G. En posant

$$\textit{angle}\ \mathrm{CEF} = \textit{angle}\ \mathrm{CFE} = \alpha$$

on aura

$$\textit{angle}\ \mathrm{ECF} = \pi - 2\alpha; \quad \textit{angle}\ \mathrm{GEA} = \alpha;$$

$$\textit{angle}\ \mathrm{CAF} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \tfrac{1}{3}\ \textit{angle}\ \mathrm{ACF}.$$

Par conséquent l'arc AF est le double de CF, c'est-à-dire que CF est le tiers de AC, comme Kinner l'a avancé.

Pour appliquer cette remarque à la trisection de l'arc ABC, il est évidemment suffisant de trouver l'intersection du cercle D avec une courbe engendrée comme il suit : « Ayant tiré par le point D une transversale

Digitized by Google

arbitraire qui coupe au point X la corde AC, on prend sur cette transversale un point Y tel qu'on ait CY = CX; le lieu de Y est la courbe dont il s'agit ». Pour déterminer la nature de cette trisectrice, prenons un système de coordonnées ayant D comme origine et l'axe des x parallèle à AC. Alors si x, y sont les coordonnées de Y, a et b celles du point fixe C, $\frac{x}{y}b$ et b seront celles de X et la condition CX = CY donne l'équation

$$\left(a - \frac{x}{y}b\right)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

ou, en divisant par $y - b$, après multiplication par y^2,

$$(x^2+y^2)\,y + bx^2 - 2axy - by^2 = 0.$$

Comme le lieu représenté est une cubique circulaire ayant un point double à tangentes rectangulaires, la courbe trisectrice est une strophoïde. La première partie de notre assertion est donc démontrée.

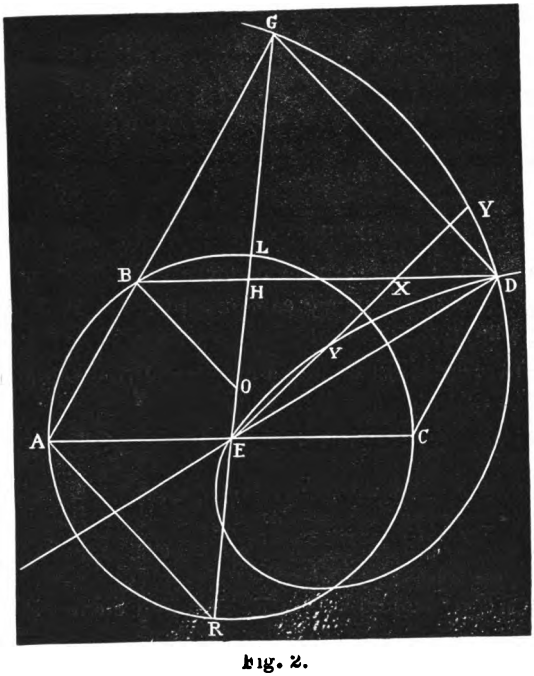


Fig. 2.

On peut ajouter que la strophoïde coupe le cercle en dehors du point C et des points circulaires à l'infini, en trois points : ce qui correspond au degré du problème de la trisection d'un arc.

II. Dans sa réponse à Kinner, envoyée le 9 août 1653, le grand géomètre hollandais fait connaître le procédé suivant pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données (*Œuvres de Huygens*, t. I, p. 238) : « Prenons la plus grande AC des deux droites données comme diamètre d'un cercle, dont E soit le centre (fig. 2), traçons la corde AB égale à la plus petite de ces droites;

Digitized by Google

complétons le parallélogramme ACDB et conduisons par le point E une droite telle que, si G, H et L sont ses intersections avec les droites AB, BD et l'arc BC, on ait HD = HG; alors BG et GL seront les deux moyennes cherchées. »

Pour le démontrer, soit R l'extrémité du diamètre LE; menons BO parallèle à AR. Alors, comme les deux triangles BOH et ARE sont semblables et comme AE = ER, on a aussi BH = HO. Par construction, on a également HG = HD; donc OG = BD = CA = RL; si de part et d'autre, dans l'égalité GO = RL, on retranche OL, on obtient GL = OR. Or on a GR.GL = GA.GB, donc

$$\frac{GR}{GA} = \frac{GB}{GL};$$

puis, comme les triangles BGO, AGR sont semblables, on obtient

$$\frac{RG}{GA} = \frac{OG}{GB} = \frac{RG - OG}{GA - GB} = \frac{OR}{AB} = \frac{GL}{AB}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{GB}{GL} = \frac{OG}{GB} = \frac{GL}{AB};$$

et, comme OG = AC,

$$\frac{AC}{BG} = \frac{BG}{GL} = \frac{GL}{AB}, \qquad q.e.d.$$

Cela posé, pour tracer la transversale auxiliaire EG, il suffit de déterminer le point G. A cet effet, on peut déterminer l'intersection G de la droite AB avec le lieu qu'on obtient de la manière suivante : Sur chaque droite menée par le point E et coupant BD en X, on prend XY = XD. Or ce lieu est, par définition, la strophoïde correspondante à l'angle EDB. Donc la strophoïde est une courbe duplicatrice, comme il fallait le démontrer.

Gênes, 24 octobre 1898.

SUR LA LIMITE VERS LAQUELLE TEND UN CERTAIN TRIANGLE LOBATCHEFSKIEN ;

par M. F. Dauge, professeur émérite à l'Université de Gand.

Parmi les diverses démonstrations que Legendre a proposées pour prouver que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale

Digitized by Google

à deux droits, il en est une dont il dit « qu'elle est rigoureuse et n'exige « aucun postulatum, avantage qu'on n'avait trouvé jusqu'alors dans « aucun des livres élémentaires publiés depuis Euclide, c'est-à-dire « depuis près de deux mille ans. »

Rappelons succinctement en quoi consiste cette démonstration. Soit ABC un triangle dans lequel $AB \geqslant AC \geqslant BC$ et, par conséquent aussi, en désignant les angles par les lettres placées aux sommets, $C \geqslant B \geqslant A$ (fig. 1).

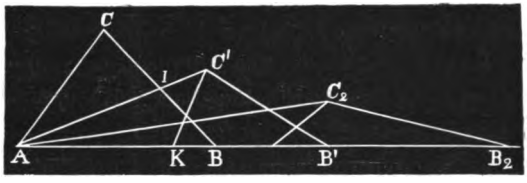


Fig. 1.

Joignons le point A au point I, milieu de BC ; prenons sur cette droite $AC' = AB$ et, sur la base AB du triangle, $AK = KB' = AI$; puis joignons C'K et C'B'. Nous formons ainsi un triangle AC'B', dont nous désignerons par A' le sommet placé en A, et qui est composé des deux triangles AKC' et B'KC', respectivement égaux aux triangles ABI et ACI qui composent le triangle proposé ABC ; or on a

$$C' = B + C, \quad A' + B' = A, \quad \text{d'où} \quad A' + B' + C' = A + B + C$$

et

$$A'C' = AB \geqslant AC = B'C', \quad \text{d'où} \quad B' \geqslant A' ;$$

par conséquent aussi

$$C' = C + B > A > B' \geqslant A' \quad \text{et} \quad A = B' + A' \geqslant 2A' ;$$

donc, dans le triangle A'B'C' la somme des trois angles est la même que dans le triangle primitif et on a $A' \leqslant \frac{A}{2}$, $B' < A$.

On peut alors opérer sur le triangle A'B'C' comme on a opéré sur le triangle primitif et former un troisième triangle $A_2B_2C_2$ dans lequel la somme des angles est encore $A + B + C$, avec les conditions

$$A_2 < \frac{A'}{2} \text{ et } B_2 < A', \quad \text{d'où} \quad A_2 < \frac{A}{4} \text{ et } B_2 < \frac{A}{2}.$$

En répétant n fois cette opération, on obtient un triangle $A_nB_nC_n$ dans lequel

$$A_n + B_n + C_n = A + B + C \text{ et } A_n < \frac{A}{2^n}, \quad B_n < \frac{A}{2^{n-1}}.$$

Digitized by Google

Il s'ensuit que les angles A_n et B_n tendent vers zéro; si en même temps l'angle C_n tendait vers π, la somme $A_n + B_n + C_n$ différerait de π d'une quantité moindre que toute grandeur donnée; et, puisqu'elle est égale à $A + B + C$, on pourrait en conclure que dans le triangle ABC la somme des angles vaut deux droits.

Pour prouver qu'il en est réellement ainsi, Legendre suppose fixes les deux sommets A_n et B_n et il fait remarquer que si on fait alors tourner autour de ces points les deux côtés A_nC_n et B_nC_n jusqu'à ce que les angles A_n et B_n s'annulent, le sommet C_n finit par tomber sur A_nB_n et qu'ainsi l'angle C_n devient égal à deux droits.

Mais l'illustre analyste n'a pas remarqué qu'il se plaçait ainsi dans des conditions très différentes de celles que supposait sa démonstration, puisque, dans celle-ci, la base A_nB_n du triangle tend vers l'infini.

Lobatchefsky a fait voir (*) que, si dans le triangle ABC la somme des angles était égale à $\pi - \alpha$, les angles A_n et B_n tendraient effectivement vers zéro, mais qu'il n'en serait pas de même de la distance du sommet C_n à la base A_nB_n. Si l'on désigne cette distance par h, on a, à la limite, $A_n + B_n + C_n = \pi - \alpha$ et $\operatorname{sh} h = \cot \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. La démonstration dont Legendre paraît avoir été si satisfait est donc fausse.

On peut se demander ce qu'elle deviendrait si on la fondait sur des considérations analogues, mais en laissant constante la base AB du triangle. Il suffit pour cela de renverser le triangle C'B'K et de le placer comme l'indique la fig. 2, ce qui s'obtient en prenant sur le prolongement de AI une longueur $IC_1 = AI$, I étant le milieu de BC et en joignant BC_1. On a ainsi un triangle ABC_1 dans lequel nous désignerons les angles par A_1, B_1, C_1, les deux premiers étant ceux dont les sommets se trouvent en A et B; nous désignerons aussi par a_1, b_1, c_1 les côtés opposés à ces angles et nous supposerons que l'on ait dans le triangle primitif $B \geqslant A \geqslant C$, d'où $b \geqslant a \geqslant c$.

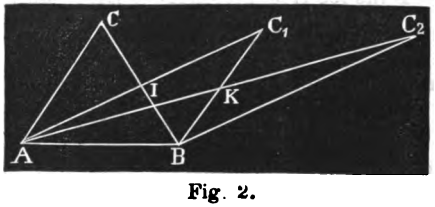


Fig. 2.

(*) *The Introduction to the Elements of Geometry*, translated from the russian, by George Bruce Halsted. — Extract from a Paper to the Texas Academy of Science. December 22, 1897, p. 5.

Digitized by Google

Les triangles BIC_1 et CIA étant égaux, on a les égalités

$$B_1 = B + C,\ A_1 + C_1 = A;\quad \text{d'où}\quad A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C,$$

et il est aisé de voir que l'on a aussi

$$B_1 = B + C > A > A_1,\ a_1 = BC_1 = AC = b \geqslant c \text{ ou } c_1;$$

donc

$$B_1 > A_1 \gtrless C_1,\quad b_1 > a_1 \gtrless c_1,\quad a_1 = b.$$

Si l'on opère sur le triangle $A_1B_1C_1$ comme on a opéré sur ABC, on forme un troisième triangle $A_2B_2C_2$ dans lequel nous désignerons par A_2 et B_2, les angles dont les sommets se trouvent aux points fixes A et B et qui nous donne les relations

$$B_2 = B_1 + C_1,\ A_2 + C_2 = A_1,$$

d'où
$$A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C$$

et
$$B_2 > A_2 > C_2,\quad b_2 > a_2 > c_2,\quad a_2 = b_1.$$

En répétant n fois cette opération on aura, dans le triangle $A_nB_nC_n$,

$$B_n = B_{n-1} + C_{n-1},\ A_n + C_n = A_{n-1},\ A_n + B_n + C_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$$

et

$$B_n > A_n > C_n,\quad b_n > a_n > c_n,\quad a_n = b_{n-1}.$$

Montrons maintenant que le côté b_n, qui est incessamment croissant, tend vers l'infini.

Dans les triangles AKC_1, BKC_2 on a

$$AK + KC_1 > AC_1 = b_1,\quad BK + KC_2 > BC_2 = AC_1 = b_1;$$

d'où, en additionnant ces inégalités membre à membre

$$AC_2 + BC_1 = b_2 + a_1 = b_2 + b > 2b_1 \quad \text{ou} \quad b_2 - b_1 > b_1 - b;$$

on trouverait de même

$$b_n - b_{n-1} > b_{n-1} - b_{n-2};$$

par conséquent, si on pose $b_1 - b = \delta$, on a

$$b_1 - b = \delta,\quad b_2 - b_1 > \delta,\quad b_3 - b_2 > \delta,\ \ldots\ldots,\ b_n - b_{n-1} > \delta;$$

donc, en additionnant ces inégalités membre à membre, on trouve $b_n > b + n\delta$; et, pour n indéfiniment croissant, on a $\lim b_n = \infty$.

Le sommet C_n du triangle s'éloignant jusqu'à l'infini, tandis que les deux autres sommets restent fixes, on doit en conclure que l'angle C_n tend vers zéro, les deux côtés A_nC_n et B_nC_n devenant parallèles à la limite. De plus, l'angle A_n du triangle et l'angle extérieur $\pi - B_n$ sont

Digitized by Google

incessamment décroissants; on pourrait donc croire qu'ils tendent vers zéro et qu'à la limite les deux côtés A_nC_n et B_nC_n se confondent avec AB prolongé. Cela est vrai effectivement en géométrie euclidienne et, si l'on pouvait prouver qu'il en est toujours ainsi, le postulatum d'Euclide serait démontré; mais quand on n'admet pas le postulatum, ces angles tendent vers des limites différentes de zéro et que nous nous proposons de déterminer (*).

Observons que, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, la somme des angles du triangle ABC peut être moindre que deux droits; nous supposerons donc

$$A_n + B_n + C_n = \pi - \alpha$$

et nous devrons alors faire usage des formules trigonométriques de Lobatchefsky.

Nous avons d'abord

$$\sin C_n = \frac{\operatorname{sh} c_n \sin A_n}{\operatorname{sh} a_n};$$

or le facteur $\operatorname{sh} c_n$ est constant; $\sin A_n$ est plus petit que l'unité et $\operatorname{sh} a_n$ tend vers l'infini quand n croît indéfiniment; donc C_n tend vers zéro, ce qui confirme ce que nous avons déjà dit plus haut; il résulte encore de là que $\lim (A_n + B_n) = \pi - \alpha$. Nous conviendrons d'écrire, pour abréger, A_∞, B_∞, $C_\infty = 0$ au lieu de $\lim A_n$, $\lim B_n$ et $\lim C_n$.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\cos C_n = -\cos A_n \cos B_n + \sin A_n \sin B_n \operatorname{ch} c;$$

mais

$$\cos C_\infty = 1, \quad \cos B_\infty = \cos(\pi - A_\infty - \alpha) = -\cos(A_\infty + \alpha),$$
$$\sin B_\infty = \sin(A_\infty + \alpha).$$

Donc, il vient successivement

$$1 = \cos A_\infty \cos(A_\infty + \alpha) + \sin A_\infty \sin(A_\infty + \alpha) \operatorname{ch} c,$$
$$1 = \cos(2A_\infty + \alpha) + \sin A_\infty \sin(A_\infty + \alpha)(\operatorname{ch} c + 1),$$

$$\sin^2\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin \tfrac{1}{2} A_\infty \cos \tfrac{1}{2} A_\infty \sin \tfrac{1}{2}(A_\infty + \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(A_\infty + \alpha) \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2},$$

$$\sin^2\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) = \left[\sin\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right]\left[\sin\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right] \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2},$$

(*) La présente note servira de rectification à une petite erreur qui s'est glissée dans notre *Cours de Méthodologie mathématique*, p. 187, l. 1, en remontant.

Digitized by Google

$$\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\left[\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]\operatorname{ch}^2\frac{c}{2},$$

$$\sin\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{th}\frac{c}{2}}.$$

Il est aisé de voir que l'on pourrait, dans ces formules, permuter les lettres A_∞ et B_∞ et que l'on obtiendrait ainsi

$$\sin\left(B_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{th}\frac{c}{2}}.$$

On trouve donc pour les angles $A_\infty+\frac{\alpha}{2}$ et $B_\infty+\frac{\alpha}{2}$ le même sinus et, en effet, ces angles sont supplémentaires; le premier est aigu et le second obtus.

On a vu que les côtés a_n et b_n tendent vers l'infini et on trouvera sans peine la limite vers laquelle tend la différence $b_n - a_n$; on a

$$\operatorname{ch} c=\operatorname{ch} a_n \operatorname{ch} b_n-\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n \cos C_n=\operatorname{ch}(b_n-a_n)+\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n(1-\cos C_n);$$

on a aussi

$$\frac{\operatorname{sh} a_n \cdot \operatorname{sh} b_n}{\sin A_n \sin B_n}=\frac{\operatorname{sh}^2 c}{\sin^2 C};$$

d'où

$$\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n (1-\cos C_n)=\frac{\sin A_n \cdot \sin B_n \operatorname{sh}^2 c}{2\cos^2\frac{1}{2}C_n}.$$

Mais $C_\infty = 0$, d'où $\cos\frac{1}{2}C_\infty = 1$, et nous avons trouvé aussi

$$\sin A_\infty \sin B_\infty = \sin A_\infty \sin(A_\infty+\alpha)=\frac{\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{2}};$$

donc on a, à la limite,

$$\operatorname{ch}(b_\infty-a_\infty)=\operatorname{ch} c-\frac{\operatorname{sh}^2 c}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{2}}=2\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}-1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{c}{2};$$

Digitized by Google

$$\operatorname{ch}(b_\infty - a_\infty) = 2\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,;$$

$$\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}(b_\infty - a_\infty) = \operatorname{ch}\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

En géométrie euclidienne on a $\alpha = 0$, $b_\infty - a_\infty = c$.

On peut encore se proposer de trouver ce que devient, à la limite, la perpendiculaire abaissée du sommet C_n sur la base A_nB_n du triangle.

A cet effet, remarquons que, si on désigne par P_n le pied de cette perpendiculaire, on a dans le triangle rectangle $C_nP_nA_n$,

$$\operatorname{th} A_nP_n = \operatorname{th} b_n \cos A_n.$$

Or, à la limite, $\operatorname{th} b_n = 1$; donc *lim.* $\operatorname{th} A_nP_n = \cos A_\infty$.

D'autre part, si l'on désigne par p la distance du point A au point de la droite AB où il faut élever sur celle-ci une perpendiculaire pour obtenir la parallèle à $A_\infty C_\infty$, on sait que l'on a $\operatorname{th} p = \cos A_\infty$; d'où $\lim A_nP_n = p$. La perpendiculaire C_nP_n devient donc, à la limite, parallèle aux côtés $A_\infty C_\infty$ et $B_\infty C_\infty$, comme il était facile de le prévoir, et le pied de cette perpendiculaire tombe à une distance p du point A donnée par la relation $\operatorname{th} p = \cos A_\infty$.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1049.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 280).

Résoudre et discuter le système

$$\sin y \cos z = \sin a, \quad \sin z \cos x = \sin b, \quad \sin x \cos y = \sin c.$$

(J. Neuberg).

Solution par M. H. Mandart. Désignons par λ, μ, ν les sinus de x, y, z; par l, m, n ceux de a, b, c. Les équations proposées prendront la forme

$$\mu^2(1-\nu^2) = l^2, \quad \nu^2(1-\lambda^2) = m^2, \quad \lambda^2(1-\mu^2) = n^2. \qquad (a)$$

En en faisant la somme, puis le produit, on obtient

$$\Sigma\lambda^2 - \Sigma\mu^2\nu^2 = \Sigma l^2, \qquad (1)$$

$$\lambda^2\mu^2\nu^2(1 - \Sigma\lambda^2 + \Sigma\mu^2\nu^2 - \lambda^2\mu^2\nu^2) = l^2m^2n^2. \qquad (2)$$

Digitized by Google

La dernière équation, si l'on tient compte de (1), se réduit à

$$\rho^4 - (1 - \Sigma l^2)\rho^2 + l^2m^2n^2 = = 0 \qquad (3)$$

où ρ représente le produit $\lambda\mu\nu$; par conséquent,

$$2\rho^2 = 1 - \Sigma l^2 \pm \sqrt{(1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2m^2n^2}. \qquad (4)$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations

$$\lambda^2\mu^2(1 - \nu^2) = l^2\lambda^2, \quad \lambda^2(1 - \mu^2) = n^2,$$

il vient

$$\lambda^2(1 - l^2) = n^2 + \rho^2;$$

on en conclut

$$2\sin^2 x \cos^2 a = 1 - l^2 - m^2 + n^2 \pm \sqrt{(1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2m^2n^2}.$$

Autre solution. En tirant des deux dernières équations (a) les valeurs de μ^2 et ν^2 pour les porter dans la première, on trouve

$$(1 - l^2)\lambda^4 - (1 - l^2 - m^2 + n^2)\lambda^2 + n^2(1 - m^2) = 0. \qquad (5)$$

Il résulte de là

$$2\sin^2 x \cos^2 a = 1 - l^2 - m^2 + n^2 \pm \sqrt{\mathrm{R}},$$

après avoir posé

$$\mathrm{R} = (1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2 m^2 n^2$$
$$= (1 - \Sigma l^2 + 2lmn)(1 - \Sigma l^2 - 2lmn).$$

Le premier facteur de R se transforme successivement en :

$$1 - \sin^2 b - \sin^2 c + \sin^2 b \sin^2 c - (\sin a - \sin b \sin c)^2,$$
$$\cos^2 b \cos^2 c - (\sin a - \sin b \sin c)^2,$$
$$[\cos(b + c) + \sin a][\cos(b - c) - \sin a];$$

le second a pour valeur

$$[\cos(b - c) + \sin a][\cos(b + c) - \sin a].$$

Donc R s'annule lorsque $\pm a = \frac{1}{2}\pi - (b \pm c) + 2k\pi$, ou que $a \pm b \pm c = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$. On voit aussi, en faisant varier a d'une manière continue, que R peut être positif ou négatif.

Les termes extrêmes de l'équation (5) étant positifs, les deux valeurs de λ^2 seront positives si l'on a

$$\mathrm{R} > 0, \quad 1 - l^2 - m^2 + n^2 > 0.$$

La dernière égalité revient à

$$\cos^2 c < \cos^2 a + \cos^2 b.$$

Digitized by Google

Les deux valeurs de μ^2 et de ν^2, pour qu'elles soient positives, exigent $R > 0$ et

$$\cos^2 a < \cos^2 b + \cos^2 c, \quad \cos^2 b < \cos^2 a + \cos^2 c.$$

Si $\cos^2 a > \cos^2 b > \cos^2 c$, il suffit de poser

$$R > 0, \quad \cos^2 a < \cos^2 b + \cos^2 c.$$

Il faudrait encore exprimer que les deux valeurs de λ^2 sont comprises entre 0 et 1. Or, le premier membre de (5) prend des valeurs positives pour $\lambda^2 = 0$ et pour $\lambda^2 = 1$; donc les deux racines sont comprises entre 0 et 1 ou toutes deux plus grandes que 1. Dans le premier cas, l'une des racines est comprise entre 0 et la demi-somme des racines, la seconde entre cette demi-somme et 1; donc si l'on remplace λ^2 par la demi-somme, le premier membre de (5) doit prendre le signe —. Mais si l'on remplace λ^2 par $-\frac{B}{2A}$ dans $A\lambda^4 + B\lambda^2 + C$, on trouve $\frac{4AC - B^2}{4A}$, de sorte que l'on doit poser $B^2 - 4AC > 0$, c'est-à-dire $R > 0$. Ainsi, les conditions trouvées ci-dessus sont suffisantes.

L'équation (3) semble imposer une nouvelle condition

$$\Sigma l^2 < 1, \text{ ou } \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c > 2.$$

Si celle-ci est vérifiée, on a, *à plus forte raison*,

$$1 - l^2 - m^2 + n^2 > 0, \quad 1 - m^2 - n^2 + l^2 > 0, \text{ etc. (J. N.).}$$

×Question 1051.

(Voir *Mathesis* (2), tome VI, p. 32).

A un triangle donné ABC, *on inscrit un triangle quelconque* A'B'C' *et on circonscrit un triangle* A''B''C'' *dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux de* A'B'C'. 1° *On a*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C''A}{AB''}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{A''B}{BC''}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{B''C}{CA''}.$$

2° *Si* A', B', C' *sont les pieds des bissectrices intérieures du triangle* ABC, *et que la parallèle par* A'' *à* B'C' *rencontre* AB *en* M, AC *en* N, *on a*

$$MA'' = A''N, \quad MB = BC = CN,$$

$$\overline{MN}^2 = a^2(3 - 2\cos A + 2\cos B + 2\cos C) = a^2(1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C).$$

(J. Neuberg).

Digitized by Google

Solution par MM. Colart, Francq, Droz Farny, Delahaye et Brien. 1° La figure donne

$$\frac{BA'}{A'C'} = \frac{\sin BC'A'}{\sin B}, \quad \frac{A'C}{A'B'} = \frac{\sin A'B'C}{\sin C},$$

d'où, par division,

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{A'C'.\sin BC'A'.\sin C}{A'B'.\sin A'B'C.\sin B} = \frac{\sin A'B'C'.\sin BC'A'.\sin C}{\sin A'C'B'.\sin A'B'C.\sin B} \quad (1)$$

D'autre part,

$$\frac{C''A}{AB} = \frac{\sin ABC''}{\sin BC''A}, \quad \frac{AB''}{AC} = \frac{\sin ACB''}{\sin AB''C},$$

d'où, par division,

$$\frac{C''A}{AB''} = \frac{AB.\sin AB''C.\sin ABC'}{AC.\sin BC''A.\sin ACB''} = \frac{\sin AB''C.\sin ABC''.\sin C}{\sin BC''A.\sin ACB''.\sin B}. \quad (2)$$

On voit aisément que les expressions (1) et (2) sont identiques.

2° Les triangles semblables MBA'', ABC'', puis les triangles semblables NCA'', ACB'' donnent

$$\frac{MA''}{BA''} = \frac{AC''}{BC''}, \quad \frac{NA''}{CA''} = \frac{AB''}{CB''},$$

d'où, par division,

$$\frac{MA''}{NA''} = \frac{AC''.BA''.CB''}{AB''.BC''.CA''} = \frac{A'B.B'C.C'A}{CA'.AB'.AC'} = 1.$$

Donc $$MA'' = NA''.$$

Ensuite, les triangles semblables MBA'', ABC'' donnent

$$MB = \frac{AB.BA''}{BC''}.$$

Donc

$$\frac{MB}{BC} = \frac{AB}{BC}.\frac{BA''}{BC''} = \frac{AB'}{B'C}.\frac{BA''}{BC''} = 1.$$

Donc $MB = BC = a$.

On trouverait de même $NC = BC = a$.

En troisième lieu,

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= (a+c)^2 + (a+b)^2 - 2(a+c)(a+b)\cos A \\ &= 2a^2 + (b^2 + c^2 - 2bc\cos A) + 2a(c - b\cos A) + \\ &\qquad 2a(b - c\cos A) - 2a^2\cos A \\ &= a^2(3 + 2\cos B + 2\cos C - 2\cos A) = \\ &\qquad a^2(1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C).\end{aligned}$$

Digitized by Google

Remarques I. L'égalité MA'' = NA'' a lieu chaque fois que ABC et A'B'C' sont deux triangles homologiques. (Colart).

II. La première partie de la question donne un moyen simple d'inscrire à un triangle ABC un triangle A'B'C' dont on connaît les inclinaisons des côtés sur ceux du triangle ABC. Il suffit, en effet, de circonscrire ABC le triangle A''B''C'' semblable à A'B'C', puis, par partages proportionnels, de trouver les sommets A', B' et C'. (Colart).

III. Les constructions des triangles A'B'C', A''B''C'' et de la droite MN restant les mêmes, si les droites AA', BB', CC' concourent en un point P dont les coordonnées normales absolues dans le triangle ABC sont x, y, z, on a :

1° $$MA'' = NA'';$$

2° $$MB.z = NC.y = BC.x;$$

3° $$\overline{MN}^2 = \frac{a^2}{y^2z^2}[\Sigma x^2y^2 + 2xyz(y\cos B + z\cos C - x\cos A)].$$

(Déprez).

Question 1052.

(Voir *Mathesis* (2) t. VI, p. 32).

Par le sommet A *d'une ellipse on mène une corde quelconque* AB. *Trouver l'enveloppe de la circonférence qui touche la droite* AB *en* B *et qui a son centre sur l'axe* OA *de l'ellipse.* (Déprez).

Solution par M. Seligmann. Soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Menons BN perpendiculaire sur la corde AB; le point N de rencontre avec l'axe OA sera le centre de la circonférence touchant la droite AB en B, et le rayon sera égal à NB. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point B et soit α la distance ON ; on aura

$$\alpha = x_1 - \frac{y^2}{a - x}, \quad R^2 = y_1^2 + (x_1 - \alpha)^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

L'équation du cercle sera

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2,$$

ou en éliminant α_1, y_1 et R entre ces équations,

$$c^2x_1^2 - 2(e^2x + ab^2)x_1 + a^2x^2 + 2b^2ax + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Comme elle est du second degré par rapport au *paramètre* variable x_1,

Digitized by Google

il suffit d'égaler à zéro son discriminant pour avoir l'enveloppe du cercle mobile. On trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{c^2},$$

équation d'une ellipse semblable et concentrique à l'ellipse donnée.

Ont résolu la même question MM. Brocard, Barisien, Soons, Droz Farny et Colart.

×Question 1057.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 56).

Si p est un nombre premier,

$$[1.3.5.\ldots(p-2)]^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pmod p.\quad\text{(Stuyvaert)}$$

Solution par MM. Colart et Soons. D'après le théorème de Wilson,

$$1.2.3.\ldots(p-1)\equiv-1.\qquad(1)$$

Or les nombres pairs

$$2,4,6,\ldots,p-1$$

sont égaux à p diminués des nombres impairs

$$p-2,p-4,\ldots 1;$$

donc le produit

$$2.4.6.\ldots(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}.(p-2)(p-4)\ldots 3.1.\qquad(2)$$

Multiplions les deux membres de la congruence (2) par $1.3\ldots(p-2)$; il viendra

$$1.2.3.4\ldots(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}.[1.3\ldots(p-2)]^2,$$

ou, à cause de (1), la congruence proposée.

BIBLIOGRAPHIE.

Annuaire pour l'an 1899, publié par le Bureau des Longitudes, avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 1898 (In-18 de VI-784 pages, avec 2 cartes magnétiques). Prix : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85).

Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur-constructeur P. Gautier, sur le *Sidérostat à lunette de soixante mètres de foyer et de* 1m25 *d'ouverture*, qu'il construit pour l'Exposition de 1900 ; *les ballons-sondes*, par M. Bouquet de la Grye, et la *Notice sur la Géodosie moderne en France*, par le Colonel Bassot.

Digitized by Google

×QUESTIONS D'EXAMEN.

864. Soient O, I, I_1, I_2, I_3 les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits aux triangles ABC, G le centre de gravité et H l'orthocentre. On a

$$9(\overline{GO}^2 + \overline{GI}^2 + \overline{GI_1}^2 + \overline{GI_2}^2 + \overline{GI_3}^2)$$
$$-(\overline{HO}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{HI_1}^2 + \overline{HI_2}^2 + \overline{HI_3}^2) = 96\,R^2.$$

(D'AVILLEZ).

865. Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C.

Si A', B', C' sont les centres de ces cercles, les points A, B, C sont les points de contact du cercle inscrit (exinscrit) au triangle A'B'C avec les côtés. On cherchera donc le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on mène en A, B, C des perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC.

Si M est le milieu de BC, le rayon $A'B = \alpha$ résulte de

$$\frac{1}{\overline{BM}^2} = \frac{1}{\overline{BO}^2} + \frac{1}{\overline{BA'}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{1}{R^2}$$

ou mieux de

$$A'B = \frac{BM}{\cos A'BC} = \frac{a}{2\cos A} = \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Cette dernière formule peut se transformer en

$$\alpha = \tfrac{1}{4} r r_1 r_2 r_3 \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{r_2 r_3 - r r_1}\right)^2,$$

résultat qui nous a été communiqué par M. d'Avillez.

866. Dans tout triangle, on a

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$

(E. N. BARISIEN).

On sait que $abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr(a + b + c)$, etc.

867. Si par un même point P de la circonférence circonscrite au triangle ABC on mène les cordes PA', PB', PC' parallèles à BC, CA, AB, les secondes extrémités A', B', C' de ces cordes sont les sommets d'un triangle A'B'C' symétriquement égal à ABC. Les droites AA', BB', CC' sont parallèles, de sorte que les deux triangles ont un axe de symétrie.

Réciproquement, étant donnés deux triangles ABC, A'B'C' symétri-

Digitized by Google

quement égaux et inscrits au même cercle, on peut trouver un point P tel que les droites PA′, PB′, PC′ soient parallèles à BC, CA, AB.

868. Enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un rectangle donné est constante. (GREENSTREET).

Si la droite mobile a pour équation $ax + by + c = 0$, on a la condition

$$(a\alpha + b\beta + c)^2 + (a\alpha - b\beta + c)^2 + (-a\alpha + b\beta + c)^2 + (a\alpha + b\beta - c)^2 = 4K^2(a^2 + b^2)$$

ou

$$a^2(K^2 - \alpha^2) + b^2(K^2 - \beta^2) = c^2.$$

L'enveloppe est une conique; si K varie, la conique engendre un système homofocal.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1197. Etant données deux circonférences, on prend dans l'une une corde tangente à l'autre et l'on considère le triangle déterminé par la corde dans l'une et le point diamétralement opposé au point de contact dans l'autre. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit. (SOONS).

×**1198**. Eliminer x et y entre les équations

$$\cos x + \cos y = a,\ \cot x + \cot y = b,\ \text{cosée}\, x + \text{cosée}\, y = c.$$

×**1199**. Dans tout triangle ABC, la différence des cotangentes des angles que la médiane AM fait avec les côtés adjacents est égale à la cotangente de la différence des angles adjacents au troisième côté.

(E. N. BARISIEN).

×**1200**. Dans un triangle ABC, on mène les tangentes au cercle inscrit parallèles respectivement à BC, CA, AB. Soient l, m, n leurs longueurs comprises entre les deux autres côtés de ABC. Calculer les côtés a, b, c. (LEMOINE).

Rectifications. — P. 247, n° 7, lire $(3n - 2r)^2$ au lieu de $(3n\ 2r)^2$; n° 8, mettre le signe + entre $[2(n-1)]^2$ et $[2(n-1)]^5$. P. 249, n° 13, 3e ligne, écrire $n^4 - n^3 - n^2 + n + 1$, au lieu de $n^4 - n^3 - n^2 + 1$; n° 15, 1re égalité, lire $(n^\alpha + n^\beta \pm 1)$ au lieu de $(n^\alpha + n^\beta \mp 1)$; 2e égalité, lire $\frac{n^\alpha(n^\alpha \pm 1)}{2}$ au lieu de $\frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2}$; n° 16, lire *d'un cube et d'un triangulaire* au lieu *d'un cube et de la moitié d'un triangulaire* (G. DE R.).

Page 256, nous avons oublié de mentionner une solution de la question 944, par M. DEPREZ.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES (*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Problèmes d'arithmétique; par M. A. Boutin 23
×Propositions sur les progressions arithmétiques; par M. de Rocquigny-Adanson 57
×Dernier chiffre des neuvièmes puissances; par M. E. N. Barisien 113
Sur une équation de Pell; par M. A. Boutin 159
Sur les puissances des nombres entiers; par M. F. Mariantoni 244
×Questions d'arithmologie; par M. de Rocquigny 246, 280
×Question 1119; solution par MM. Barbette, François, etc. 27
×Question 1147; solution par MM. Goulard, Emmerich, etc. 52, 112
Question 1151; solution par MM. H. Brocard et Boutin 126
×Question 1157; solution par MM. J. Jonesco, Colart, etc. 128

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Résolution hydrostatique de l'équation du troisième degré; par M. Demanet. 81
×Des progressions logarithmiques; par M. E. Barbette 135
×Question 1127; solution par M. J. Degueldre 30
×Question 1149; solution par M. Emmerich 54
×Question 1134; solutions par MM. Audibert et J. Neuberg 76
×Question 1125; solutions par MM. J. Degueldre et J. F. d'Avillez . . . 144
×Question 1152; solution par M. Smout 147
×Question 1073; solutions par MM. Déprez, Mandart, etc. 200
×Question 1169; solution par M. Barbette 213
×Question 1049; solutions par MM. Mandart et Neuberg 273
×Question 1057; solutions par MM. Colart et Soons 278

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemannienne; par M. F. Dauge 5
Deux nouvelles démonstrations du postulatum d'Euclide (P. M.) 25
Pour la géométrie euclidienne (P. M.) 33
Propriétés du triangle (A. C.) 45
Sur les relations de Ptolémée et de Feuerbach; par M. A. Krahé 83
Quelques propriétés trigonométriques des quadrilatères gauches; par M. J. Wasteels 85
Sur l'inverseur de Hart; d'après M. Mannheim 87
Rectification approchée de la circonférence; par M. E. S. Barrachina . . . 88
Sur les triples de cercles associés; par M. J. J. Duran Loriga 108

(*) Rectifications, pp. 98, 104, 165, 216, 264, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Digitized by Google

Pages.
Note sur les bissectrices d'un triangle; d'après MM. Goulard et D. André. . 112
Sur deux transversales remarquables du triangle; par M. A. Gob 129
Exercices; par M. E N. Barisien 153, 185, 221
Sur les triangles orthogonalement circonscrits à un triangle donné. . . . 163
Encore une démonstration du postulatum d'Euclide (P. M.) 188
Sur la figure du carré de l'hypoténuse; d'après Zahradnik 193
Projection oblique d'une aire plane 193
Simple remarque sur le triangle; par M. De Tilly. 217
Sur les polyèdres réguliers; par M. J. Wasteels 242
Sur un certain triangle lobatchefskien; par M. F. Dauge 267
Question 909; solution par MM. Poort, Déprez, etc. 26
Question 1114; solution par MM. E. Colart et J. Déprez. 51
Question 1116; solution par MM. J. Degueldre, François, etc. 51
Question 1136; solution par MM. Emmerich et Fairon 78
Question 1130; solution par M. E. Colart 99
Question 1141; solution par M. E. Libert, etc. 100
Question 1163; solution par MM. G. Gérard, Goux, etc. 148
Question 1145; solution d'après MM. Déprez et Maes. 172
Question 1146; solution par MM. Déprez, Rose, etc. 173
Question 1164; solution par MM. Goux et François 174
Question 1063; solution par MM. Colart, Francq, etc. 198
Question 1067; solution par MM. Colart, Francq, etc. 199
Question 1068; solution par MM. Jerábek et Brien 199
Question 1078; solutions par MM. Colart, Jerábek, etc. 203
Question 789; solution par M. Déprez 253
Question 944; solution par MM. Droz Farny et J. Jonesco 256
Question 1051; solutions par MM. Colart, Francq, etc. 275

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur une enveloppe (J. N.). 45
Note de géométrie; par M. A. Goulard 45
Sur l'hyperbole équilatère; par M. A. Goulard 46
Propriétés des cercles de Chasles; par M. H. Brocard 61
Propriétés des coniques; par M. Cazamian. 88
Rayon de courbure des coniques; par M. Droz Farny 115
Sur un groupe de trois paraboles; par M. J. Neuberg 131
Exercices; par M. E. N. Barisien 153, 185, 221
Sur les triangles homologiques; par M. J. Neuberg 155
Sur le lieu des sommets des courbes du second ordre; par M. Barbette . . 191
Lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné 194
Sur la sphère et les quadriques de douze points du tétraèdre général; par M. L. Ripert 218
Sur la généralisation et la dualisation des propriétés de la parabole; par M. L. Ripert 251
Question 1014; solution par M. Collette. 26
Questions 1105 et 1117; solutions par MM. E. N. Barisien et Droz-Farny . 92

Digitized by Google

Pages
Question 815; solution par M. Stuyvaert 117
Question 1029; solution par M. J. Jonesco. 120
Question 1118; solution par MM. Colart, Retali, etc. 121
Question 1148; solution par M. A. Goulard. 124
Question 1154; solution par MM. A. Boutin, G. Gérard, etc. 127
Question 1122; solution par M. Droz-Farny 143
Question 1137; solution par MM. Droz-Farny et Barisien 146
Question 1076; solution par M. Servais. 165
Question 1142; solution par M. Retali 169
Question 1115; remarque par A. C. 191
Question 1077; solution par M. Cl. Servais. 201
Question 1121; solutions par MM. Buysens et Déprez 205
Question 1168; solution par M. E. Colart 212
Question 971 ; solutions par MM. Cl. Servais, Barisien, etc. 228
Question 1060; solution par M. Buysens 231
Question 1052; solution par M. Seligmann. 277

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur les groupes polaires de systèmes de points; par M. Stuyvaert 20
Normales aux surfaces et aux courbes algébriques; par M. Stuyvaert. . . 105
Théorèmes; par M. A. Cazamian. 138
Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements; par le R. P. Bosmans. . . . 139
Exercices; par M. E. N. Barisien. 153, 185, 221
Cissoïde et strophoïde; par M. Droz Farny. 164
Étude géométrique du point simple d'une courbe gauche; par M. F. Chomé . 177
Sur une cubique circulaire; par M. V. Jerábek. 224
Sur la strophoïde ; par M. G. Loria 265
Question 1097; solution par M. Soons 29
Question 857; solution par M. Absolonne. 48
Question 990; solutions par MM. Retali, Mandart 69
Question 1112; solution par M. V. Retali 73
Question 1026; solution par M. E. N. Barisien 74
Question 1143; solution par M. Audibert 123
Question 1119; solution par M. V. Retali 139
Question 1111; solution par M. V. Retali 168
Question 1142; solution par M. V. Retali 169
Question 1135; solution par M. J. De Gueldre'. 205
Question 1155; solutions par MM. H. Lez et J. Neuberg. 207
Question 1131; solutions par MM. Audibert et Jerábek 233
Question 1158; solutions par MM. Lez, Déprez, etc. 236
Question 1064; solution par M. E. Colart 258
Question 1132; solution par MM. V. Cristesco, Déprez, etc. 259
Question 1155; solution par M. J. Déprez, etc. 262

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Exercices; par M. E. Barisien. 153, 185, 221
Sommation d'une série; par M. A. Boutin 249

Digitized by Google

Pages.
Question 1153; solution par M. J. Jonesco 100
Question 1143; solution par M. Audibert 123

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE, PUBLICATIONS RÉCENTES.

Baugard. Problèmes d'algèbre 32
J. Versluys. Rekenkunde 32
H. Brocard. Bibliographie des courbes géométriques 32
Prix Lobatchefsky 44
G. Lazzeri et A. Bassani. Geometria 66
E. Colart. Algèbre, 2e édition 67
L. Lorentz. Œuvres scientifiques 67
G. Darboux Systèmes orthogonaux, etc. 67
L. Lévy. Fonctions elliptiques 68
C. A. Laisant. La Mathématique 89
W. W. Rouse Ball. Récréations mathématiques 91
B Lefèvbre. Algèbre. — Problèmes d'algèbre 113
P. Brasseur. Décomposition en facteurs 113
N. Charruit. Géométrie cotée 114
J. Tannery, J. Molk. Fonctions elliptiques, t. III 114
R. Ball. 12th Memoir on Screws 114
F. Klein. Conférences mathématiques 114
M. Cantor. Geschichte der Mathematik, III Band, 3te Abth. 162
H G. Zeuthen. Geschichte der Mathematik, etc. 195
G. Loria. Teorie geometriche (Presente et Passato) 196
G. de Longchamps. Problèmes de géométrie analytique 197
C. Bergmans. Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre 227
G. Tarry. Le postulatum d'Euclide. 227
E. Mougin. Logarithmes 227
E. Colart. Notions d'algèbre 228
Jean Nicolas Mister (1832-1898) 241
Annuaire du Bureau des Longitudes 278

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 821, 822-823, 824-831, 832-834, 839-47, 848-850, 851-856, 857-859, 860-863, 864-867, pp. 32, 56, 79, 102, 150, 175, 214, 237, 262 279
École polytechnique de Paris. Composition de mathématiques. 149
Exercices; par M. E. N. Barisien. 153, 185, 221

SUPPLÉMENTS (57 pages).

Notice sur la vie et les travaux de H. J. S. Smith (1826-1883); par P. Mansion (9 pages).
La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité; par M. Servais (48 pages).

Digitized by Google

QUESTIONS (*).

	POSÉE	RÉSOL
	(1) I ou (2) I	(2) VII
95	206 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
353	159	
×357	159	
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
415	46	NR
	(1) VI ou (2) I	
×513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	NR
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) X	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
784	216	
785	216	NR
×789	240	253
	(2) III	
815	56	117
825	80	NR
857	176	48
876	216	NR
882	240	
×886	240	
×889	264	
892	264	
892bis	280	
	(2) IV	
905	32	NR
×909	55	26
910	55	
939	127	
×944	128	256
953	152	
971	216	228
×973	216	
×986	263	
×989	264	
990	264	69
	(2) V	
×1002	32	
1013	80	
1014	104	26
×1019	128	27
×1029	176	120
1030	176	
1033	215	
×1041	240 et 264	
1042	240	
1043	264 (t. VI, 31)	
×1044	264	
1045	264	
1046	264	
1047	280	
1048	280	NR
1049	280	273
1050	280	
	(2) VI	
×1051	32	275
1052	32	277
1054	32	
1055	32	
1056	56	
1057	56	278
1060	80	231
×1063	80	198
1064	104	258
1065	104	
1066	104	
×1067	104	199
×1068	128	199
1069	128	
×1071	128	
1072	142	
×1073	142	200
1074	142	
1075	142	
1076	192	165
1077	192	201
×1078	192	203
1079	192	
1082	215	
1084	215	
1085	216	
1086	216	
1087	216	
1088	216	
×1089	240	NR
1090	240	
×1091	240	
1092	240, 280	NR
1096	264	
1097	280	29
1098	280	
1099	280	
	(2) VII.	
1101	31, 51	
1102	31	NR
×1105	32	92
1107	51	
×1109	52	NR
1111	80, 102	168
1112	80	73
×1114	80	51
×1116	102	51
1117	102	92
1118	102	121
1119	125	139
1121	126	205
1122	127	143
×1123	150	NR
×1125	150	144
1126	151	74
×1127	175	30
1129	175	NR
×1130	175	98
1131	213	233
1132	213	259
1133	214	NR
×1134	214	76
1135	214	205
×1136	214, 237	78
1137	214	146
×1138	215	NR
×1139	237	NR
1140	237	NR
×1141	238	100
1142	238	169
1143	261	123
1144	261	NR
×1145	262	172
×1146	262	173
1147	279	52
1148	279	124
×1149	279	54
1150	279	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

Digitized by Google

	POSÉE	RESOL
	Tome VIII.	
1151	31	126
1152	31	147
1153	31	100
1154	31	127
1155	31 207, 262	
1156	31	
×1157	55	128
1158	55	236
1159	55	
1160	56	
1161	78, 104	
1162	78	NR
×1163	79	148
×1164	79	174
×1165	104	
1166	104	NR
1167	104	NR
1168	104	212
×1169	128	213
×1170	128	
×1171	128	
1172	128	
1173	152	NR
1174	152	
1175	152	
×1176	152	
1177	176	
×1178	176	
1179	176	NR
1180	176	
1181	215	
1182	215	
1183	216	NR
×1184	216	
×1185	216	
1186	216	
1187	216	
1188	216, 239	
1189	239	
1190	240	
1191	240	
1192	240	NR
1193	263	
×1194	263	NR
×1195	264	NR
1196	264	
1197	280	NR
1198	280	NR
1199	280	NR
1200	280	NR

Digitized by Google

TABLE DES NOMS.

Abel, 90.
Absolonne, 48.
Agnesi, 163.
Alembert (d'), 163.
Andrien, 74, 205.
Antomari, 84.
Apollonius, 195, 231.
Appell, 69.
Archimède, 90, 195.
Audibert, 54, 76, 123, 125, 233.
Avillez (d'), 145, 279
Ball (Robert), 114, 195.
Ball (Rouse), 91.
Barbarin, 226.
Barbette, 27, 28, 128, 135, 191, 213.
Barisien, 31, 48, 51, 55, 65, 71, 74, 79, 80, 9[illegible], 97, 99, 100, 102, 103, 104, 113, 121, 123, 125, 143, 146, 148, 151, 152, 153, 165, 169, 171, 176, 185, 199, 207, 212, 214, 221, 229, 236, 240, 244, 256, 259, 263, 264, 278, 279, 280.
Barrachina (Sanchis), 88.
Bassani, 65.
Bastin, 229.
Baugard, 32.
Beltrami, 8, 39.
Bergmans, 227.
Berkeley, 163.
Bernoulli, 163.
Bianchi, 68.
Böklen, 61.
Bolyai, 86.
Bosmans, 139.
Bourget, 122, 144.
Boutin, 23, 54, 113, 125, 152, 159, 249.
Bovy, 258.
Bragelongne (de), 163.
Braikenridge, 163.
Brasseur, 113.
Breton (Ph.), 113.
Brien, 199, 276.
Brierley, 199.
Brocard, 29, 31, 32, 50, 54, 61, 78, 109, 111, 112, 124, 126, 129, 147, 152, 164, 169, 176, 218, 231, 258, 278.
Bruno, 61, 66.
Buffon, 163.
Buisseret, 72.
Buyssens, 27, 144, 205, 232.
Cajori, 162, 195.
Cambier, 26, 45, 78, 104, 141, 191, 212.
Campbell, 163.
Cantor (M), 162, 195.
Catalan, 65, 113.
Castillon, 163.
Cauchy, 13, 90.
Cayley, 31, 100.
Cazamian, 88, 138.
Cesàro (E), 44, 132.
Chapelle (De la), 163.
Charruit, 114.
Chasles, 61, 83, 91, 197.
Chomé, 177.
Clairaut, 163.
Clebsch, 114.
Colart, 30, 51, 52, 67, 71, 74, 97, 99, 100, 121, 128, 148, 171, 197, 199, 203, 212, 228, 258, 276, 278.
Collette, 26.
Comberousse (de), 46.
Comte, 90.
Crelle, 168.
Cremona, 168.
Cristesco, 26, 100, 120, 229, 259.
Darboux, 67.
Darwin, 90.
Dauge, 5, 33, 267.
Davidoglon, 216, 246.
Degueldre, 30, 52, 74, 76, 99, 100, 144, 151, 199, 206, 261.
Delahaye, 52, 97, 178, 203, 276.
Demanet, 81, 128, 148.
Déprez, 26, 50, 51, 52, 71, 74, 76, 92, 97, 121, 125, 127, 128, 140, 146, 165, 167, 169, 171, 172, 173, 176, 199, 200, 202, 203, 204, 205, 216, 228, 236, 237, 253, 259, 262, 277, 280.
Dintzl, 54.
Diophante, 195.
Dirichlet, 90.
Dörholdt, 65.
Doppelmayr, 163.
Doubiago, 44.
Droz Farny, 27, 31, 52, 56, 65, 78, 95, 97, 99, 115, 121, 127, 141, 143, 146, 148, 164, 167, 168, 193, 199, 212, 229, 237, 239, 256, 259, 264, 276, 278.
Dubouis, 42.
Dufay, 163.
Duporcq, 167, 201.
Duran Loriga, 108.
Emmerich, 52, 54, 78.
Eneström, 162, 196.
Engel (Fr.), 162.
Euclide, 5, 25, 34, 188, 195, 227, 268.
Euler, 63, 162, 163, 144.
Fairon, 78.
Fermat, 90, 176.
Feuerbach, 83.
Fischer-Benzon, 195.
Fitz-Patrick, 91.
Fontaine, 163.
Fontené, 44, 240.
François, 26, 27, 52, 148, 165, 174.
Francq, 167, 198, 199.
Frégier, 80.
Frobes, 162.
Fuhrmann, 237.
Gambey, 253.
Gauss, 90, 244.
Gelin, 215.
Gérard (G), 127, 148, 264.
Gérard (L.), 44, 114.
Gibson, 162.
Gillet (J.), 167, 229.
Gob, 128, 129, 134.
Goldbach, 163.
Goudin, 163.
Goulard, 45, 46, 52, 112, 124.
Goux, 148, 174.
Gow, 195.
Grandi, 163.
Grassmann, 197.
Greenhill, 69.
Greenstreet, 279.
Grunert, 193.
Gua (de), 163.
Halphen, 69, 114.
Halsted, 268.
Hart, 87.

Digitized by Google

Heilbronner, 162.
Henry, 69.
Hermann, 163.
Hirst, 144.
Hoffmann, 61.
Hoüel, 91.
Huygens, 265, 266.
Jacobi, 69, 90.
Jacquier, 163.
Jerábek, 100, 111, 199, 204, 224, 234.
Jonesco (Bogdan), 121, 165
Jonesco (Jean), 27, 71, 73, 100, 120, 128, 229, 256.
Kant, 90.
Kästner, 163.
Kerseboom, 163.
Kinner, 265, 266.
Klein (F.), 44, 114.
Klompers, 71.
König, 163.
Köpke, 38.
Kotelnikof, 44.
Krafft, 163.
Krahé, 83.
Kühn, 163.
Lacour, 69.
Lagrange, 90, 162.
Laisant, 61, 89, 112.
Lamarle, 91.
Lambert, 188.
Lamé, 67.
Laugel, 114.
Laurens, 26.
Lazzeri, 66.
Lefebvre, 113.
Lefèvre, 76.
Legendre, 25, 42, 69, 188, 217, 267, 268.
Legrand (M), 200.
Leibniz, 13, 31, 90.
Lemoine, 55, 109, 113, 134, 164, 173, 236, 264, 280.
Lévy, 68.
Lez, 207, 236.
Libert, 52, 121.
Lie (Sophus), 44.
Lionnet, 113.
Listray, 148.
Lobatschefsky, 5, 34, 44, 217, 268.
Longchamps (de), 110, 113, 197.
Lorenz, 67.
Loria (Gino), 196, 265.
Maclaurin, 163.
Maes (V.), 99, 100, 121, 172, 199.
Mairan (de), 163.
Mandart, 27, 71, 121, 200, 273.
Mannheim, 87.
Mansion, 5, 25, 33, 69, 87, 91, 163, 191, 196, 193, 217, 241.
Mariantoni, 244.
Maupertuis, 163.
Maxwell, 67.
M'Cay, 110.
Merlin, 121.
Meyer (Fr. W.), 162.
Michel (Ch.), 46, 65.
Mister, 141.
Mitcheson, 80.
Möbius, 90.
Moivre, 163.
Molk, 69, 114.
Monge, 166, 171, 201, 259.
Monteiro (Schiappa), 122.
Montucla, 163.
Moore, 54.
Moret-Blanc, 113.
Morin de la Pillière, 236.
Mougin, 227.
Moxon, 163.
Müller (F.), 196.
Muirhead, 172.
Nasimof, 44.
Naudé, 163.
Neppi, 140.
Neuberg, 26, 30, 31, 45, 47, 76, 77, 104, 110, 115, 131, 155, 175, 185, 186, 197, 198, 200, 203, 207, 212, 216, 222, 224, 240, 241, 253, 262, 273, 275.
Newton, 90, 162.
Nicole, 163.
Niewenglowski, 65, 112.
Ocagne (d'), 61, 144.
Ozanam, 163.
Pascal, 116.
Paillotte, 61.
Peano, 38.
Pell, 159.
Pelz, 11.
Petersen (J.), 104.
Petit-Bois, 128, 151, 215.
Plakhovo, 173.
Poinsot, 176.
Polignac (de), 61, 66.
Poncelet, 64, 90, 122.
Poort, 26, 258.
Ptolémée, 83.
Realis, 113.
Rebuffel, 46.
Retali, 70, 73, 121, 140, 143, 152, 168, 169, 205.
Reyneau, 163.
Riemann, 5, 33.
Ripert, 148, 218, 251.
Rocquigny (de), 31, 52, 55, 57, 113, 126, 128, 246, 280.
Romieu, 74, 148.
Rose, 173.
Rouché, 46.
Rudio (F.), 162.
Saccheri, 163.
Salmon, 108, 229.
Saverien, 163.
Schoute, 69.
Schwering, 162.
Segner, 163.
Seiliger, 44.
Séjour (Du), 163.
Seligmann, 121, 277.
Servais (Cl.), 50, 115, 144, 165, 20, 229.
Simpson (Th.), 163.
Simson (R.), 15, 163.
Sintzov, 44.
Smout, 147.
Sonine, 162.
Soons, 29, 41, 74, 76, 100, 128, 167, 171, 199, 216, 236, 263, 264, 278, 280.
Souvorof, 44.
Stäckel, 162.
Stanham, 79, 174.
Staudt (von), 91.
Steiner, 62, 64, 65, 90, 110, 117, 168.
Stewart, 15, 97, 118, 163.
Stirling, 163.
Stockhausen, 162.
Stone, 163.
Strymeersch, 199.
Sturm, 162.
Stuyvaert, 20, 67, 105 216, 233, 239, 264, 278.
Tannery (J.), 69, 114.
Tannery (P.), 195.
Tarry, 25, 227.
Tischer, 162.
Tilly (De), 18, 67, 217.
Valentiner, 67.
Varignon, 163.
Vassilief, 44.
Versluys, 32.
Vuibert, 46, 65, 79.
Wasteels (J.), 85, 242.
Weidler, 162.
Weierstrass, 38.
Wickersheimer, 25.
Wilson, 278.
Wolff, 162, 163.
Zahradnick, 193.
Zeuthen, 162, 195.
Ziwet, 114.

Digitized by Google

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DE

H. J. S. SMITH (1826-1883)

PAR

P. MANSION, professeur à l'Université de Gand (1).

I

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE

Henry John Stephen Smith était le second fils de John Smith, l'un des membres les plus distingués du barreau irlandais et de Mary Murphy. Il naquit à Dublin, le 2 novembre 1826. Son père étant mort en 1828, sa mère vint s'établir à l'île de Wight. C'est là que s'écoula l'enfance du jeune Henry, qui était maladif, mais extraordinairement bien doué.

Madame Smith, femme très remarquable et très instruite, même dans les langues anciennes, dirigea elle-même son éducation, en se faisant aider toutefois par d'excellents maîtres. Le jeune Smith ne passa que deux ans (1841-1843) dans un des grands collèges anglais, celui de Rugby ; sa santé précaire le força à quitter l'Angleterre, et à vivre sur le continent, surtout en Italie, pendant une grande partie des années suivantes. Il n'en apprit pas moins, avec une égale facilité, malgré ses déplacements continuels, les langues anciennes et modernes, les éléments des mathématiques et des sciences naturelles, l'histoire et l'archéologie.

En 1844, il subit l'examen d'entrée à Balliol College, à l'Université d'Oxford, et en fut élu Fellow en 1848. Dès lors, il était un *scholar* accompli pour les classiques : c'est d'ailleurs pour les classiques qu'il avait pris tous ses grades et ce sont ses connaissances dans ce domaine un peu archaïque qui lui ont surtout valu la haute réputation dont il a toujours joui à Oxford. Mais il

(1) Extrait de la Rev. des quest. scient., janv. 1896, t. XLIII, pp. 219-227.

Digitized by Google

aimait les mathématiques et il désirait les enseigner, bien que cette science ne soit pas estimée à Oxford autant qu'elle devrait l'être. Avec sa prompte intelligence, il se mit donc à apprendre par lui-même les hautes mathématiques et, sauf Ampère, il n'y a sans doute jamais eu d'autodidacte qui en ait poussé l'étude aussi loin.

Dès 1850, il devint *Mathematical Lecturer* à Balliol College. Ce fut à partir de cette époque qu'il fut un *oxonien* de fait comme de nom ; car auparavant, tandis qu'il était officiellement élève à Oxford, il avait dû, maintes fois, comme dans son enfance, fuir le climat trop rude de l'Angleterre et résider, en hiver, dans des pays plus chauds.

En 1860, il fut élu Professeur Savilien de géométrie à l'Université d'Oxford, mais il n'en conserva pas moins, par dévouement à Balliol College, ses fonctions de *Mathematical Lecturer*, pendant dix ans encore. Quand il les abandonna, il ne sut pas résister aux sollicitations qui l'assaillaient et il accepta trop de fonctions accessoires, qui l'empêchèrent de se livrer tout entier à ses recherches mathématiques et contribuèrent sans doute à abréger sa vie. Ainsi, en 1870, il devint *Examinateur* pour les mathématiques à l'Université de Londres ; la même année, il entra aussi comme membre à la *Royal Commission on Scientific Education*. En 1877, il fit partie de l'*Oxford University Commission*, et fut nommé, la même année, président du *Meteorological Office*. En 1878, ses amis essayèrent, heureusement en vain, de le faire entrer au Parlement, comme représentant de l'Université d'Oxford.

Il mourut cinq ans après, le 9 février 1883, prématurément sans doute, épuisé qu'il était par les labeurs excessifs auxquels il s'astreignit pour remplir dignement les diverses charges qu'il avait assumées par dévouement à la science et à l'Université d'Oxford.

Tous ceux qui ont connu Henry Smith rendent hommage à l'aménité de son caractère, à la sûreté de ses relations, à la délicatesse de ses sentiments ; c'était un ami fidèle. Il était foncièrement modeste, sans ambition aucune et tout dévoué à ses devoirs, quels qu'ils fussent (1). En conversation, il était brillant causeur,

(1) Son biographe, le Dr Ch. H. Pearson, dit à ce propos : " His character can scarcely be explained, except by ranking him with those who feel that they are " *ever in the great Taskmaster's eye* „. My impression is that he accepted christianity not only as a habit and a conviction, but as a rule of life. „ *Mathematical Papers*, vol. I, p. xxxv.

Digitized by Google

mais toujours bienveillant dans ses jugements sur les hommes et les choses, parce que la bonté, une bonté disciplinée, formait le fond de son caractère.

Smith avait une intelligence à la fois vaste et profonde. Esprit méditatif, il savait étudier jusque dans leurs principes premiers les questions les plus abstruses de l'Arithmétique supérieure ; mais en même temps, il suivait d'un œil attentif les progrès des mathématiques dans toutes les directions. Son érudition, d'ailleurs, s'étendait bien au delà des limites de sa science de prédilection. Il avait, en particulier, étudié avec soin les questions relatives à l'enseignement des sciences dans les Collèges et les Universités(1).

Les principaux sujets sur lesquels il fit des leçons à l'Université d'Oxford sont la Géométrie moderne, la Géométrie analytique, la Théorie des nombres, le Calcul des variations et la Théorie des équations différentielles ; mais les circonstances ne lui permirent pas de pousser bien loin l'exposition d'aucune de ces matières.

Smith était un professeur éminent : il était clair et rigoureux, habile à soutenir l'intérêt de ses élèves en leur montrant les liens qui rattachent les principes à leurs conséquences. Dans ses communications, toujours très remarquées, à la Société mathématique de Londres et à l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences, il parvenait à donner à ses auditeurs une idée exacte de ses plus difficiles recherches sur la Théorie des nombres ou sur les Fonctions elliptiques, tant il possédait à un haut degré l'art de se mettre à la portée des intelligences même les moins préparées.

La clarté, la rigueur, la stricte ordonnance logique de l'ensemble et des détails caractérisent aussi ses écrits mathé-

(1) Citons quelques-unes de ses pensées sur ce sujet : " Geometry is nothing if it be not rigorous, and the whole educational value of the study is lost if strictness of demonstration is trifled with. „ (M. P., II, p. 686.) " Geometry is hard, just as Greek is hard, and one reason why Geometry and Greek are such excellent educational subjects is precisely that they are hard. „ (M. P., II, p. 687.)

Il s'exprime aussi avec une rare netteté sur le rôle des sciences de la nature dans la formation intellectuelle des jeunes esprits : les sciences naturelles développent l'esprit d'observation, la chimie apprend l'art d'expérimenter; la physique, celui de raisonner avec suite et précision sur les données de l'observation et de l'expérience, par l'intermédiaire des mathématiques. Toutes d'ailleurs font aimer la vérité pour elle-même; car " In science, error is always possible..., but sophistry is impossible „ (M. P., II, p. 688).

Digitized by Google

matiques. Pour le fond et pour la forme, il est de l'école de ce modèle achevé, Gauss, dont il a si profondément médité les écrits et qui a été, avec le Jacobi des *Fundamenta*, le vrai maître de sa pensée. La postérité le placera parmi les grands arithméticiens de notre siècle, à côté de Cauchy, de Jacobi, de Dirichlet, d'Eisenstein, de Kummer et de Kronecker, pour ne citer que les morts.

II

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

Les travaux mathématiques de Smith ont été publiés en deux gros volumes in-4° sous le titre : *The Collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith, M. A., F. R. S., late Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford. Edited by J. W. L. Glaisher, Sc. Dr., F. R. S., Fellow of Trinity College, Cambridge; with a Mathematical Introduction by the Editor, biographical Sketches and a Portrait. In two Volumes. Volume I* (XCV-663 pp.); *volume II* (719 pp.). *Oxford, at the Clarendon Press,* 1894.

L'esquisse biographique (pp. IX-XXXVI), due à la plume du Dr Charles H. Pearson, est suivie de *Recollections* par le Professeur Jowett, Lord Bowen, M. J. L. Strachan-Davison, M. Alfred Robinson (pp. XXXVII-LIX) et M. J. L. W. Glaisher (pp. LXXVII-XCV). C'est à ces pages, écrites par les amis anciens ou nouveaux de l'illustre géomètre, que nous avons emprunté la substance de l'esquisse biographique qui précède. Dans ce qui suit, nous allons essayer de donner une idée des travaux de Smith en nous aidant de l'introduction mathématique due au savant éditeur (pp. LXI-LXXVII).

Les premiers écrits mathématiques de Smith, en 1851 et 1852 se rapportent à la Géométrie. Deux ans après, il publie (en latin) sa première note sur la Théorie des nombres, où il prouve d'une manière originale le théorème de Fermat : tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est la somme de deux carrés. Depuis lors jusqu'en 1867, presque tous ses travaux se rapportent à la Théorie des nombres; ensuite, il fait paraître plusieurs mémoires sur la Géométrie. Dans les dernières années de sa vie, il s'occupe surtout de la Théorie des Fonctions elliptiques. On peut donc distribuer en trois groupes naturels les travaux de l'illustre

Digitized by Google

professeur d'Oxford : Théorie des nombres, Géométrie, Fonctions elliptiques.

Dans la Théorie des nombres, il faut citer d'abord le *Report on the Theory of Numbers*, dont les six parties, présentées à l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences en 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1865 forment un ouvrage de 327 pages in-4° de la plus haute valeur. Ce n'est ni une histoire, ni un traité de la Théorie des nombres, mais quelque chose d'intermédiaire. L'auteur y analyse avec une clarté et un ordre admirables les travaux des géomètres depuis un siècle, sur la Théorie des congruences et sur celle des formes binaires quadratiques. Il le fait avec une compétence parfaite : il renvoie aux sources originales, indique le principe et esquisse la marche des démonstrations, et fait connaître les résultats obtenus, en ajoutant maintes fois du sien aux unes et aux autres. Selon nous, ce *Report* de Smith est le type, le modèle et l'exemple unique d'un genre d'ouvrages dont le besoin se fera de plus en plus sentir : il devient, en effet, impossible d'exposer, *tout au long*, dans des traités complets sur les diverses subdivisions des hautes mathématiques, l'ensemble des recherches qui s'y rattachent. Mais les maîtres de la science, ceux qui sont parvenus, dans l'une ou l'autre direction, à en reculer les frontières, pourront utilement faire ce qu'on peut appeler une carte critique et détaillée de telle ou telle province mathématique, comme Smith l'a réalisé pour l'Arithmétique supérieure (1).

Pendant la préparation du *Report*, Smith publia des travaux sur divers sujets d'Arithmétique supérieure. Les uns parurent sous une forme achevée dans les PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS et

(1) " Sous le titre modeste de *Rapport sur la Théorie des nombres*, M. Smith avait entrepris une véritable encyclopédie arithmétique, où il devait coordonner et discuter tous les résultats obtenus dans cette science par Legendre, Gauss, Dirichlet, Cauchy, Jacobi, Eisenstein, Hermite, Kummer, Kronecker, etc. Ce grand travail, où la profondeur de l'érudition et la sagacité de la critique méritent une égale admiration, n'a pas été terminé, les sections annoncées sur la Théorie des formes quadratiques à plus de deux variables et sur les formes de degré supérieur n'ayant pas été écrites. Malgré tout le regret que doit inspirer cette lacune, cet ouvrage n'en est pas moins le monument le plus complet et de beaucoup qui ait jamais été élevé à la Théorie des nombres. „ (C. JORDAN, dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, t. XCVI, p. 1096, 16 avril 1883). Voir aussi, plus bas, ce qu'il dit du dernier Mémoire de Smith. On rencontre dans plusieurs des écrits de Smith des indications bibliographiques et autres qui sont comme des pierres d'attente des parties du *Report* qui n'ont pas paru.

Digitized by Google

traitent des systèmes d'équations linéaires indéterminées ou de congruences, ou des ordres et des genres des formes quadratiques ternaires ; les autres, plus courts, ne contiennent que les résultats de recherches extrêmement difficiles que l'auteur se réservait de développer plus tard. Il convient de citer, en particulier, la note intitulée : *On the Orders and Genera of Quadratic Forms containing more than Three Indeterminates* (PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY, vol. XVI, pp. 197-208; 1867; réimprimé ici, vol. I, pp. 510-523). Au moyen des principes généraux exposés dans cette note, il complète la solution donnée par Eisenstein du problème de la décomposition d'un nombre en cinq carrés, puis il résout, pour sept carrés, la question analogue, qui, croyons-nous, n'a été abordée par personne ni avant ni après Smith.

La dernière partie du *Report*, publiée en 1865, traite presque exclusivement des applications de la Théorie des Fonctions elliptiques à la Théorie des nombres, dues à Jacobi, Kronecker et Hermite. C'est sans doute à propos de ces recherches d'Arithmétique supérieure que Smith fut amené à s'occuper de la Théorie des Fonctions thêta. En 1866, il fit paraître un mémoire court, mais très substantiel, où il démontre, sur le produit de quatre fonctions thêta, un théorème fondamental auquel Jacobi avait fait allusion, sans même l'énoncer, en 1845, dans une lettre à M. Hermite ; il en déduit les principaux résultats de la Théorie des Fonctions elliptiques. La démonstration de Jacobi du même théorème fondamental, n'a été connue qu'en 1881, trente ans après sa mort, et elle diffère de celle de Smith. Celui-ci a publié, en 1879, sur le même sujet, un second mémoire très court, mais riche en résultats, qui est la continuation du premier et qui d'ailleurs date de la même époque.

Pendant quelques années, après cette première excursion dans la Théorie des Fonctions elliptiques, Smith revient à l'objet de ses premiers travaux et semble absorbé complètement par des recherches géométriques. Nous citerons en particulier deux mémoires assez étendus, l'un sur diverses constructions géométriques relatives aux coniques et aux cubiques, et l'autre sur les propriétés focales des figures homographiques ou corrélatives. En 1868, l'Académie royale des Sciences de Berlin lui décerna, en partage avec M. Kortum, le prix Steiner pour un grand mémoire *Sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* qui fut publié (en français) dans les ANNALI DI MATEMATICA. Dans

Digitized by Google

la première section de cet important travail, l'auteur traite des imaginaires en Géométrie; dans la seconde, il résout, au moyen de la règle, du compas et d'une conique fixe supposée tracée, le problème de l'intersection de deux coniques données par des éléments réels ou imaginaires; dans la troisième, il aborde les questions analogues sur les cubiques et les quartiques et, en particulier, détermine les trois derniers points d'intersection de deux quartiques passant par treize points communs, réels ou imaginaires, sujet qui avait été signalé par l'Académie à l'attention des concurrents. Les solutions de Smith sont présentées sous forme synthétique, mais, dit le rapporteur, Kummer, elles ont visiblement été trouvées par une voie analytique; elles sont d'ailleurs complètes au point de vue scientifique : tous les points de vue sous lesquels on peut considérer chaque problème sont exposés et comparés.

Après ce grand mémoire, Smith ne publia plus que deux écrits relatifs à la Géométrie, l'un (1875) sur les singularités supérieures des courbes planes où il examine si les indices de singularités définis par Cayley satisfont aux relations pluckériennes ; l'autre (1876) sur les conditions de perpendicularité dans un système parallélipipédique, suscité par une question de cristallographie.

On rencontre ensuite dans les œuvres de Smith, un certain nombre de mémoires plus ou moins étendus d'Arithmétique supérieure, la plupart écrits plusieurs années avant la date de leur publication; il suffira d'en signaler deux relatifs aux fractions continues (le second, écrit en latin). En 1875, il avait fait paraître une note assez étendue sur l'intégration des fonctions discontinues, où il étudie avec grand soin les vues de Riemann à ce sujet.

Mais depuis 1877 (et même auparavant) jusqu'à sa mort, à part un dernier grand mémoire sur la Théorie des nombres dont nous parlerons plus bas, Smith consacre presque tous ses efforts à la Théorie des Fonctions elliptiques. Ses Notes sur la Théorie de la transformation et son grand mémoire sur les Fonctions thêta et oméga n'occupent pas moins de trois cents pages in-4° dans le second volume de ses œuvres; mais la mort l'a empêché d'achever ces recherches, qui touchent, comme il le remarque, à des questions intéressantes d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie. On ne pourra sans doute les apprécier à leur juste valeur que le jour où un analyste compétent aura fait sur la Théorie des Fonctions elliptiques un *Report* analogue à celui de Smith sur la

Digitized by Google

Théorie des nombres. Il est probable qu'on rangera alors le dernier grand mémoire de l'éminent professeur d'Oxford parmi les plus belles productions mathématiques suscitées par les *Fundamenta* de Jacobi.

Le dernier travail de Smith est écrit en français et intitulé *Mémoire sur la représentation des nombres par la somme de cinq carrés*. En voici l'origine. En février 1882, l'Académie des Sciences de Paris, proposa, comme l'année précédente, pour sujet du grand prix des sciences mathématiques, la question de la décomposition d'un nombre en cinq carrés, en signalant aux concurrents les théorèmes donnés sans démonstration en 1847 par Eisenstein, comme pouvant les guider dans leurs recherches; aucune allusion n'était faite au travail plus complet de Smith publié en 1868 et dont nous avons dit plus haut quelques mots.

Smith, sur les conseils d'un illustre géomètre, et pour sauvegarder l'honneur de l'Académie de Paris, résolut de concourir, et c'est ainsi qu'il écrivit son dernier mémoire où il démontrait les théorèmes trouvés par lui quinze ans auparavant. Le prix lui fut décerné, hélas, deux mois après sa mort, dans la séance de l'Académie du 2 avril 1883, en partage avec M. Minkowski. En réalité, c'était presque le lui décerner deux fois, puisque ce jeune savant allemand avait pu évidemment prendre connaissance du premier travail de Smith sur la question (1).

Telle est l'esquisse bien superficielle de l'œuvre mathématique du profond géomètre qui, pendant trente ans, a été l'honneur de l'Université d'Oxford. Mais parmi les écrits rassemblés dans l'édition que nous avons sous les yeux, il y en a un certain nombre semi-historiques, semi-critiques dont il convient de dire un mot, parce que mieux que ses mémoires spéciaux ils peuvent donner aux profanes une idée de l'étendue et de la variété de ses connaissances. Ce sont les suivants :

(1) Dès 1868, cet écrit de Smith avait été brièvement signalé dans le JAHRBUCH ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK, t. I, p. 54. " Ce Mémoire, dit M. Jordan, dans les COMPTES RENDUS, en parlant du travail couronné par l'Académie (l. c., p. 1096-1097), constituera, nous n'en doutons pas, un des titres les plus glorieux de l'éminent géomètre d'Oxford. Les résultats qu'il contient, joints à ceux donnés autrefois par notre illustre confrère, M. Hermite, éclairciront désormais suffisamment la théorie des formes quadratiques générales, pour qu'on puisse songer à ajouter ce nouveau chapitre au Rapport de M. Smith. „

Digitized by Google

On some of the Methods at present in use in Pure Geometry (I, pp. 1-24);

On the Present State and Prospects of some Branch of Pure Mathematics (II, pp. 166-190);

Address to the Mathematical and Physical section of the British Association at Bradford in 1873 (II, pp. 681-690);

Arithmetical Instruments (II, 691-697);

Geometrical Instruments and models (II, 698-710);

Introduction to the Mathematical Papers of Clifford (711-719).

On trouve dans ces quatre-vingt-dix pages une esquisse historique des progrès de l'Arithmétique supérieure, de la Géométrie moderne et de l'Analyse mathématique dans une foule de directions; des rapprochements ingénieux et profonds sur l'action et la réaction réciproque des diverses parties de la science mathématique; enfin des vues originales sur l'enseignement des sciences de la nature, sur l'importance de la science spéculative et sur la méthode d'invention en mathématiques (1).

En parlant de la vie et des œuvres de Henry John Stephen Smith, nous n'avons rien dit de l'admirable édition qui nous a permis de le faire. On peut la caractériser en un mot. Le savant éditeur, J. W. L. Glaisher, F. R. S., a élevé à celui dont il fut l'ami et le confident pendant les dix dernières années de sa vie, un monument digne de ce maître illustre; c'est en même temps, pour la postérité, un témoignage éclatant de la confraternité scientifique des deux grandes Universités anglaises, dans le domaine le moins accessible aux passions humaines, celui des mathématiques.

(1) " Mathematical discovery is like electricity; it follows the lines of least resistance, etc. „ (M. P., II, p. 183)." The rules that can be given in aid of mathematical discovery are, I suppose, very few and I have ventured to call your attention to one of them — the rule that bids us to follow up any opening that may present itself, rather than try to force a way against obstacles which may prove insurmontable... Another rule, which is of less general application, but nevertheless often useful,... is that a apparent contradiction (as distinct of a mere misunderstanding) is always to be regarded as an indication of some undiscovered truth „ (M. P., II, p. 186).

Digitized by Google

Imprimerie POLLEUNIS & CEUTERICK, 30, rue des Orphelins, Louvain.
Même maison à Bruxelles, 37, rue des Ursulines.

Digitized by Google

(Extrait du tome LVIII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1898.)

LA COURBURE ET LA TORSION

DANS

LA COLLINÉATION ET LA RÉCIPROCITÉ

PAR

Cl. SERVAIS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

1. Étant donnés deux espaces projectifs, à une courbe (C) du premier, décrite par un point M, correspond une courbe (C_1) du second, décrite par l'homologue M_1 de M. Les coordonnées du point M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la projectivité, les coordonnées du point homologue M_1 sont des fonctions de la même variable t. Deux points correspondants M et M_1 sont déterminés par une même valeur de t.

En donnant à cette valeur t un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C) un point N infiniment voisin de M, et sur la courbe (C_1), un point N_1 infiniment voisin de M_1. Les deux points N et N_1 sont correspondants. Désignons par A' et B' deux points de la droite MN; par A'_1 et B'_1 leurs homologues sur M_1N_1, en réservant les mêmes lettres non accentuées A et B, A_1 et B_1, pour représenter deux points de la tangente m à la courbe (C) au point M, et leurs correspondants sur la tangente m_1 à la courbe (C_1) au point M_1 (fig. 1).

Digitized by Google

Les ponctuelles M, A', N, B' et M_1, A'_1, N_1, B'_1 étant projectives, on a

$$(MA'NB') = (M_1A'_1N_1B'_1),$$

ou

$$\lim \frac{MN}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{A'B'}{NA' \cdot MB'} = \lim \frac{M_1N_1}{\Delta s_1} \cdot \frac{\Delta s_1}{\Delta t} \cdot \frac{A'_1B'_1}{N_1A'_1 \cdot M_1B'_1};$$

par conséquent,

$$ds \cdot \frac{AB}{MA \cdot MB} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette formule se simplifie par l'introduction des éléments limites, à la place des points A et B_1.

2. Appelons (fig. 1) :

a' et b' deux droites de la première figure, menées par le point M dans le plan mN ;

a'_1 et b'_1 leurs homologues dans la seconde figure ;

c et c_1 les cordes MN, M_1N_1.

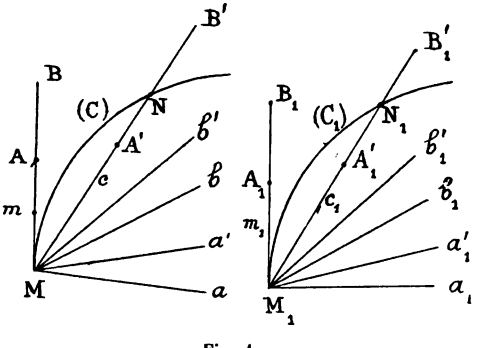


Fig. 1.

On a

$$(ma'cb') = (m_1a'_1c_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} \frac{\omega}{\Delta t} \frac{\sin(a'b')}{\sin(a'c) \cdot \sin(b'm)}$$

$$= \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\Delta t} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(a'_1c_1) \cdot \sin(b'_1m_1)}.$$

Digitized by Google

ω est l'angle de contingence de la courbe (C) au point M, ω_1 celui de la courbe (C_1) au point M_1.

Mais

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} = \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} = \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\ \sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad (2)$$

a et b sont deux droites quelconques menées par M, dans le plan osculateur μ à la courbe (C) en ce point; a_1 et b_1 sont leurs homologues.

3. Des formules (1) et (2), on déduit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\ \frac{MA\,.\,MB}{AB}\ \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} \\ =&\frac{1}{\rho_1}\ \frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Telle est la relation existant entre les rayons de courbure ρ et ρ_1 des courbes (C) et (C_1), aux points M et M_1.

COROLLAIRES. *Si deux courbes* (C) *et* (C) *ont même plan osculateur et même tangente en un point* M, *les quotients des quantités* ds *et* ds', ω *et* ω', ρ *et* ρ' *évaluées au point* M *pour chacune des deux courbes, sont projectifs* (*).

(*) PEAUCELLIER, *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective* (NOUVELLES ANNALES DE MATH., [1], t. XX, p. 427).

H. SMITH, *On the focal properties of homographic figures* (PROCEEDINGS OF THE LONDON MATH. SOCIETY, t. II, p. 196).

TH. REYE, *Ueber die focalen Eigenschaften collinearer Gebilde* (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XLVI, p. 423).

MEHMKE, *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen* (ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, t. XXXVI, p. 56).

G. FOURET, *Sur les rayons de courbure des courbes triangulaires et de courbes tétraédrales symétriques* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, t. XX, p. 60).

Digitized by Google

Si deux courbes (C) *et* (C') *sont tangentes à une même droite respectivement en* M *et* M', *et ont en ces points même plan osculateur, le quotient des courbures de* (C) *et* (C') *en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine* (*).

4. Appelons (fig. 2) α et β deux plans de la première figure, passant par la tangente m ;

α_1 et β_1 leurs homologues dans la seconde figure;

γ et γ_1 les plans mN et m_1N_1.

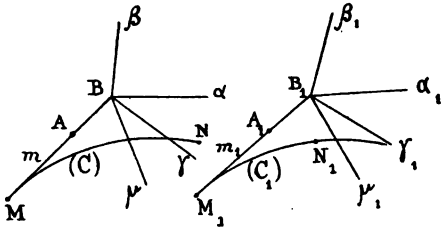


Fig. 2.

On a

$$(\mu\alpha\gamma\beta) = (\mu_1\alpha_1\gamma_1\beta_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(\mu\gamma)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\Delta t} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\gamma) \cdot \sin(\beta\mu)}$$

$$= \lim \frac{\sin(\mu_1\gamma_1)}{\eta_1} \cdot \frac{\eta_1}{\Delta t} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\gamma_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}.$$

η est l'angle de torsion de la courbe (C) au point M, η_1 celui de la courbe (C_1) au point M_1.

Mais,

$$\lim \frac{\sin(\mu\gamma)}{\eta} = \lim \frac{\sin(\mu_1\gamma_1)}{\eta_1} = \frac{1}{6}.$$

Par suite,

$$\eta \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} = \eta_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) Mehmke, *loc. cit.*, p. 56.

Digitized by Google

Des formules (1) et (4), on déduit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}\ \frac{MA\,.\,MB}{AB}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)} \\ =\ &\frac{1}{\tau_1}\ \frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Telle est la relation qui lie les rayons de torsion τ et τ_1 des courbes homologues (C) et (C_1), aux points correspondants M et M_1.

Corollaire. *Si deux courbes* (C) *et* (C') *ont en un point commun* M *même plan osculateur et même tangente, les quotients des quantités* η *et* η', τ *et* τ' *évaluées au point* M *pour chacune des deux courbes, sont projectifs* (*).

5. Soient M et M_1 deux points quelconques d'une conique Σ, S le point à l'infini de MM_1, s la droite polaire de S, T le pôle de MM_1. Cette courbe se correspond à elle-même dans l'homologie harmonique (S, s), et les points M et M_1 sont correspondants. Les rayons de courbure ρ et ρ_1 de Σ aux points M et M_1 sont donc liés par la formule

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{MA\,.\,MB}{AB}\ \frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\ \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)}\ \frac{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)}{\sin(a_1b_1)}\,. \quad (5)$$

Supposons les points B et B_1 à l'infini, A et A_1 réunis en T; les droites b et b_1 parallèles à l'axe d'homologie, les droites a et a_1 coïncidant avec MM_1; l'égalité (3) devient

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\overline{MT}^3}{\overline{M_1T}^3}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

6. *Soient* M *et* M_1, P *et* P_1 *deux couples de points conjugués harmoniques sur une cubique gauche;* m *et* μ, m_1 *et* μ_1, p *et* π,

(*) Mehmke, *loc. cit.*, p. 56.

Digitized by Google

p_1 *et* π_1 *les tangentes et les plans osculateurs en ces points ;* A, B, A_1, B_1 *les points* $m\pi$, $m\pi_1$, $m_1\pi$, $m_1\pi_1$; a, b, a_1, b_1 *les droites d'intersection des plans* μ *et* Mp, μ *et* Mp_1, μ_1 *et* M_1p_1, μ_1 *et* M_1p ; ρ *et* ρ_1 *les rayons de courbure de la cubique aux points* M *et* M_1. *On a*

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} = \frac{1}{\rho_1}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)},$$

car la cubique se correspond à elle-même, dans le système involutif gauche, ayant pour axes les droites associées issues de P et P_1. Les éléments M et M_1, A et A_1, B et B_1, a et a_1, b et b_1 sont correspondants.

7. Soient (C) et (C') deux courbes osculatrices à un même plan μ, respectivement aux points M et M'. Les tangentes m et m' en ces points se coupent en un point A. Une transversale coupe les côtés MA, M'A, MM' du triangle MM'A aux points B, C, D. Les droites b, c, d joignent les sommets M, M', A à un même point O du plan μ. A la figure

$$(C), (C'), M, M', m, m', \mu, A, B, C, D, b, c, d$$

correspond dans une projectivité la figure

$$(C_1), (C_1'), M_1, M_1', m_1, m_1', \mu_1, A_1, B_1, C_1, D_1, b_1, c_1, d_1.$$

Si l'on désigne par a et a_1 les droites MM', M_1M_1' ; par ρ, ρ_1, ρ', ρ_1' les rayons de courbure des courbes (C), (C_1), (C'), (C_1') respectivement en M, M_1, M', M_1', on a

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} = \frac{1}{\rho_1}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)},$$

$$\frac{1}{\rho'}\,\frac{M'A\,.\,M'C}{AC}\,\frac{\sin(ac)}{\sin(am')\ \sin(cm')} = \frac{1}{\rho_1'}\,\frac{M_1'A_1\,.\,M_1'C_1}{A_1C_1}\,\frac{\sin(a_1c_1)}{\sin(a_1m_1')\,.\,\sin(c_1m_1')}$$

Digitized by Google

Mais on a

$$\frac{MA}{M'A}=\frac{\sin(am')}{\sin(am)} \qquad \frac{MB\,.\,AC\,.\,M'D}{MD\,.\,AB\,.\,M'C}=1,$$

$$\frac{\sin(bm)\,.\,\sin(dm')\,.\,\sin(ac)}{\sin(dm)\ \sin(cm')\,.\,\sin(ab)}=1;$$

donc

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2}\frac{MD}{M'D}\frac{\sin(dm')}{\sin(dm)}=\frac{\rho_1'}{\rho_1}\frac{\overline{M_1A_1}^2}{\overline{M_1'A_1'}^2}\frac{M_1D_1}{M_1'D_1}\frac{\sin(d_1m_1')}{\sin(d_1m_1)} \quad . \quad (7)$$

Par conséquent :

Si (C) *et* (C) *sont deux courbes osculatrices à un même plan* μ *respectivement aux points* M *et* M′ ; m *et* m′, ρ *et* ρ' *les tangentes et les rayons de courbure en ces points ;* D *un point pris arbitrairement sur la droite* MM′ ; d *une droite quelconque menée du point* mm′ *ou* A *dans le plan* μ, *la quantité*

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2}\frac{MD}{M'D}\frac{\sin(dm')}{\sin(dm)}$$

est projective.

8. Si les éléments d et D sont incidents, en désignant par k et h les distances des points M′ et D à la tangente m, on a

$$\frac{MA}{M'A}=\frac{k'}{k}=\frac{MD}{M'D}\frac{h'}{h}=\frac{MD}{M'D}\frac{\sin(dm')}{\sin(dm)};$$

par suite, la quantité projective est alors

$$\frac{\rho'k'^3}{\rho k^3}\ (^*).$$

9. Soient Σ et Σ_1 deux surfaces correspondantes dans deux espaces projectifs. Les coordonnées d'un point de Σ sont des

(*) Mehmke, *loc. cit.*, p. 57.

Digitized by Google

fonctions de deux variables t et t' ; à l'aide des équations de la projectivité, les coordonnées du point homologue sont des fonctions des mêmes variables. Deux points correspondants sont déterminés par un même système de valeurs de t et t'. Si l'on fait $t = \varphi t'$, on a sur Σ et Σ_1 deux courbes homologues (C) et (C_1). Deux valeurs t et $t + \Delta t$ fixent sur (C) la position de deux points M et N, et sur (C_1) celle des points homologues M_1 et N_1 (fig. 3). Appelons :

m et m_1 les tangentes aux courbes (C) et (C_1) en M et M_1 ;

μ et μ' les plans tangents à la surface Σ aux points M et N ;

μ_1 et μ'_1 les plans tangents à la surface Σ_1 aux points M_1 et N_1 ;

α' et β' deux plans quelconques du premier espace, passant par la droite $\mu\mu'$;

α'_1 et β'_1 leurs homologues dans le second espace.

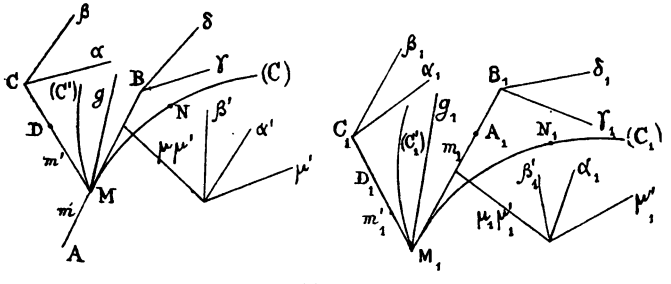


Fig. 3.

On a

$$(\mu\alpha'\mu'\beta') = (\mu_1\alpha'_1\mu'_1\beta'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(\mu\mu')}{\psi} \cdot \frac{\psi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\mu') \cdot \sin(\beta'\mu)}$$

$$= \lim \frac{\sin(\mu_1\mu'_1)}{\psi_1} \cdot \frac{\psi_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\alpha'_1\mu'_1) \cdot \sin(\beta'_1\mu_1)}.$$

ψ est l'angle des normales à la surface Σ aux points M et N (*) ; ψ_1 est celui des normales à la surface Σ aux points M_1 et N_1.

(*) Abstraction faite des infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Digitized by Google

Par suite,

$$\psi \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)} = \psi_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad (8)$$

Si m et m' sont deux tangentes conjuguées au point **M** de la surface Σ, les plans α et β sont deux plans quelconques passant par m', α_1 et β_1 sont leurs homologues.

COROLLAIRE. *Deux surfaces* Σ *et* Σ' *tangentes en un point* **M** *ont en ce point deux tangentes conjuguées* m *et* m' *communes, le quotient des quantités* ψ *et* ψ' *évaluées au point* **M**, *relativement à deux courbes* (C) *et* (C') *situées respectivement sur* Σ *et* Σ', *et tangentes en* **M** *à* m, *est projectif.*

10. On a la relation

$$\frac{ds}{\psi} = \sqrt{\rho\rho_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ρ est le rayon de courbure au point **M** de la section normale, tangente à (C). Si n est la normale à Σ au point **M**, ρ_0 est la distance du point **M** au point central sur la génératrice n, de la normalie ayant pour directrice la courbe (C) (*).

Les formules (1), (8), (9) donnent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\rho\rho_0}} \frac{MA\,.\,MB}{AB} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)} \\ =\ &\frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_{01}}} \frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

ρ_1 et ρ_{01} sont des quantités analogues à ρ et ρ_0 pour la courbe (C_1).

11. On a de même, pour deux courbes homologues (C')

(*) SERVAIS, *Quelques formules sur la courbure des surfaces* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, [3], t. XXVII, p. 900).

Digitized by Google

et (C_1'), des surfaces Σ et Σ_1, tangentes la première à la droite m', la seconde à la droite m_1' :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho'\rho_0'}}\ \frac{MC\,.\,MD}{CD}\ \frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\,.\,\sin(\delta\mu)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho_1'\rho_{01}'}}\ \frac{M_1C_1\,.\,M_1D_1}{C_1D_1}\ \frac{\sin(\gamma_1\delta_1)}{\sin(\gamma_1\mu_1)\,.\,\sin(\delta_1\mu_1)}.$$

Mais

$$\rho_0 = \rho \sin^2\varphi \ (*), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

φ étant l'angle des tangentes conjuguées m et m'. Donc

$$\sqrt{\rho\rho_0}\ .\ \sqrt{\rho'\rho_0'} = \rho\rho'\sin^2\varphi = R_1R_2,$$

$$\sqrt{\rho_1\rho_{01}}\ .\ \sqrt{\rho_1'\rho_{01}'} = \rho_1\rho_1'\sin^2\varphi_1 = R_{11}R_{21};$$

R_1 et R_2, R_{11} et R_{21} sont les rayons de courbure principaux de Σ et Σ_1, respectivement en M et M_1. Par conséquent,

$$R_1R_2 : R_{11}R_{21}$$

$$= \frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\ \frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\,.\,\sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\,.\,\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\delta_1\mu_1)}$$

$$\times \frac{MC\,.\,MD}{CD}\ \frac{C_1D_1}{M_1C_1\,.\,M_1D_1}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \quad (12)$$

Les deux facteurs du second membre séparés par le signe $\times$ contiennent le premier les éléments situés sur m et m_1, le second les éléments situés sur m' et m_1'.

12. Corollaire. *Si deux surfaces sont tangentes en un point* M, *le quotient des courbures totales en ce point est projectif* (**).

Ces deux surfaces ont en effet deux tangentes conjuguées m et m' communes.

(*) Servais, *loc. cit.*, p. 898.
(**) Mehmke, *loc. cit.*, p. 56.

Digitized by Google

13. Il en résulte que le second membre de la formule (12) ne change pas si l'on remplace le premier facteur

$$\frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\ \sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)},$$

relatif aux deux tangentes homologues m et m_1, par le facteur analogue relatif à deux droites homologues quelconques m'' et m_1'', issues de M et M_1 dans les plans μ et μ_1. Car m'' et m' peuvent être considérées comme deux tangentes conjuguées d'une surface Σ', tangente en M au plan μ. Donc :

Soient dans un espace (E) *un point* M *et un plan* μ *passant par* M ; M_1 *et* μ_1 *les éléments correspondant à* M *et* μ *dans un espace* (E_1) *projectif à* (E) ; m *et* m_1 *deux droites homologues des plans* μ *et* μ_1, *passant la première par* M, *la seconde par* M_1 ; A *et* B *deux points pris arbitrairement sur* m ; γ *et* δ *deux plans quelconques passant par* m ; A_1, B_1, γ_1, δ_1 *les éléments de* (E_1) *correspondant respectivement à* A, B, γ, δ ; *la quantité*

$$\frac{MA \cdot MB}{AB}\cdot\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\cdot\sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1}$$

reste constante, si la droite m *tourne autour du point* M *dans le plan* μ.

14. D'après la formule (12), cette constante est égale à la racine carrée du quotient $R_1R_2 : R_{11}R_{21}$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_{11}R_{21}}} = \frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\cdot\sin(\delta\mu)}\,\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)}. \quad (13)$$

Corollaire. *Si deux surfaces* Σ *et* Σ' *sont tangentes à un même plan, respectivement en* M *et* M', *le quotient des courbures totales de* Σ *et* Σ' *en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine.*

De la propriété (13) résulte aussi que dans la formule

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\cdot\sin(\beta\mu)}\,\frac{\sin(\alpha_1\mu_1)\cdot\sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \quad (5)$$

Digitized by Google

on peut supposer que les tangentes m et m_1 aux deux courbes homologues (C) et (C_1) sont remplacées par deux droites homologues quelconques des plans osculateurs μ et μ_1, et passant la première par M, la seconde par M_1.

COROLLAIRES. *Si deux courbes ont en un point commun* M *même plan osculateur, le quotient des torsions en ce point est projectif.*

Si deux courbes sont osculatrices à un même plan, respectivement aux points M *et* M', *le quotient des torsions de ces courbes en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine* (*).

15. Soient M et M_1 deux points quelconques d'une quadrique Σ; S le point à l'infini de MM_1 ; σ le plan polaire de S. Cette surface Σ se correspond à elle-même dans l'homologie harmonique (S, σ), et les points M et M_1 sont correspondants. Les courbures totales de Σ en M et M_1 sont donc liées par la relation

$$\frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_{11}R_{21}}} = \frac{MA.MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1.M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu).\sin(\delta\mu)}\,\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\,\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)}. \quad (13)$$

Les droites m et m_1 menées par M et M_1, parallèlement à l'intersection des plans tangents μ et μ_1, sont correspondantes et sont les supports de deux ponctuelles homologues égales. Si donc les éléments qui entrent dans la formule sont situés respectivement sur ces deux droites,

$$\frac{MA\,.\,MB}{AB} = \frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}.$$

Choisissons pour γ et γ_1 les plans menés par m et m_1 parallèlement à σ, et pour δ et δ_1 le plan double mm_1 :

$$\sin(\gamma\delta) = \sin(\gamma_1\delta_1).$$

(*) MEHMKE, *loc. cit.*, p. 56.

Digitized by Google

Si O est un point du plan σ, k et k_1 les distances de ce point aux deux plans μ et μ_1,

$$\frac{k}{k_1} = \frac{\sin(\gamma\mu)}{\sin(\gamma_1\mu_1)}.$$

Soient d et d_1 les distances des points M_1 et M respectivement aux plans μ et μ_1,

$$\frac{d}{d_1} = \frac{\sin(\delta\mu)}{\sin(\delta_1\mu_1)}.$$

La droite MO coupe le plan γ_1 en un point N, homologue du point d'intersection N_1 de la droite M_1O avec le plan γ; donc

$$\frac{MO}{M_1O} = \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{k_1} = \frac{d}{d_1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{R_1R_2}{R_{11}R_{21}} = \frac{d_1^4}{d^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si M *et* M_1 *sont deux points d'une quadrique,* d_1 *et* d *les distances des points* M *et* M_1 *respectivement aux plans tangents à la surface en* M_1 *et* M, *les courbures totales de la quadrique en ces points sont liées par la formule*

$$R_1R_2d^4 = R_{11}R_{21}d_1^4.$$

16. Corollaire. Si la quadrique a un centre O, en désignant par k et k_1 les distances de ce centre aux plans tangents en M et M_1, on a (voir plus haut)

$$\frac{d}{d_1} = \frac{k}{k_1};$$

donc

$$R_1R_2k^4 = R_{11}R_{21}k_1^4 = c^{te}.$$

Pour déterminer cette constante, on se place en un sommet réel de la quadrique. On désigne par a le demi-axe passant par

Digitized by Google

ce sommet, par P_b et P_c les puissances des involutions des points conjugués sur les deux autres axes; les rayons de courbure principaux R_{11} et R_{21} sont donnés par les formules

$$R_{11} = \frac{P_b}{a}, \quad R_{21} = \frac{P_c}{a};$$

donc

$$R_{11}R_{21}a^4 = P_aP_bP_c.$$

en posant

$$P_a = a^2.$$

Par suite,

$$R_1R_2 = \frac{P_a \cdot P_b \; P_c}{k^4} \text{ (*) } \ldots \ldots \quad (12)$$

17. Soient Σ et Σ' deux surfaces ayant un point commun M; μ et μ' les plans tangents en ce point; α un plan quelconque passant par $\mu\mu'$. A la figure

$$\Sigma,\ \Sigma',\ M,\ \mu,\ \mu',\ \alpha$$

correspond dans une projectivité la figure

$$\Sigma_1,\ \Sigma_1',\ M_1,\ \mu_1,\ \mu_1',\ \alpha_1.$$

Si l'on désigne par A et B deux points de $\mu\mu'$; par A_1 et B_1 leurs homologues; par K, K', K_1, K_1' les courbures totales des surfaces Σ, Σ', Σ_1, Σ_1' respectivement en M et M_1, on a

$$\sqrt{K}\ \frac{MA \cdot MB}{AB}\ \frac{\sin(\alpha\mu')}{\sin(\alpha\mu)\cdot\sin(\mu'\mu)}$$
$$= \sqrt{K_1}\ \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\mu_1')}{\sin(\alpha_1\mu_1)\cdot\sin(\mu_1'\mu_1)},$$
$$\sqrt{K'}\ \frac{MA \cdot MB}{AB}\ \frac{\sin(\alpha\mu)}{\sin(\alpha\mu')\cdot\sin(\mu\mu')}$$
$$= \sqrt{K_1'}\ \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1')\cdot\sin(\mu_1\mu_1')};$$

(*) DUPIN, *Développements de Géométrie*, 1813, troisième mémoire, article VIII.

Digitized by Google

donc

$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K'}}\frac{\sin^2(\alpha\mu')}{\sin^2(\sigma\mu)}=\frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1'}}\frac{\sin^2(\alpha_1\mu_1')}{\sin^2(\alpha_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Par conséquent, la quantité

$$\frac{K}{K'}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$

est projective.

18. Soient Σ et Σ' deux surfaces ayant un plan tangent commun μ; M et M' les points de contact, A un point de la droite MM'. A la figure

$$\Sigma,\ \Sigma',\ \mu,\ M,\ M',\ A$$

correspond, dans une projectivité, la figure

$$\Sigma_1,\ \Sigma_1',\ \mu_1,\ M_1,\ M_1',\ A_1.$$

Si l'on désigne par α, β deux plans menés par MM'; par α_1 et β_1 leurs homologues, on a

$$\sqrt{K}\ \frac{MM'\,.\,MA}{AM'}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}$$
$$=\sqrt{K_1}\ \frac{M_1M_1'\,.\,M_1A_1}{A_1M_1'}\ \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)};$$
$$\sqrt{K'}\ \frac{M'M\,.\,M'A}{AM}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}$$
$$=\sqrt{K_1'}\ \frac{M_1'M_1\,.\,M_1'A_1}{A_1M_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$

donc

$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K'}}\frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2}=\frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1'}}\frac{\overline{M_1A_1}^2}{\overline{M_1'A_1}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Par conséquent, la quantité

$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MA}^4}{\overline{M'A}^4}$$

est projective.

Digitized by Google

19. Soient Σ et Σ' deux surfaces quelconques, M un point de Σ, M' un point de Σ'; μ et μ' les plans tangents en ces points; Σ'' et Σ''' deux surfaces tangentes respectivement aux plans μ et μ', en un même point M'' de la droite $\mu\mu'$; α un plan passant par $\mu\mu'$; A, B, C les points d'intersection d'une transversale avec les côtés MM', M'M'', M''M du triangle MM'M''. Les quantités

$$\frac{K}{K''}\frac{\overline{MC}^4}{\overline{M''C}^4}, \quad \frac{K''}{K'''}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}, \quad \frac{K'''}{K'}\frac{\overline{M''B}^4}{\overline{M'B}^4}$$

sont projectives (17, 18). Leur produit

$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MC}^4 . \overline{M''B}^4}{\overline{M''C}^4 . \overline{M'B}^4}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$

est aussi projectif.

Mais

$$\frac{MC . M''B}{MA . M''C}\frac{M'A}{. M'B} = 1;$$

par suite, la quantité

$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MA}^4}{\overline{M'A}^4}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$

est projective. Donc : *Si* A *est un point quelconque de la droite joignant deux points* M *et* M', *appartenant respectivement à deux surfaces* Σ *et* Σ', α *un plan mené arbitrairement par l'intersection des plans tangents* μ *et* μ' *en ces points, la quantité*

$$(K : K')\left(\frac{MA : M'A}{\sin(\alpha\mu) : \sin(\alpha\mu')}\right)^4,$$

dans laquelle K *et* K' *désignent les courbures totales de* Σ *et* Σ' *en* M *et* M', *est projective* (*).

(*) MEHMKE, *loc. cit.*

Digitized by Google

20. Si les éléments A et a sont incidents, en désignant par d et h les distances des points M′ et A au plan μ, et par d' et h' celles des points M et A au plan μ', on a

$$\frac{d'}{d} = \frac{MA}{M'A} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{MA}{M'A} \frac{\sin(\alpha\mu')}{\sin(\alpha\mu)};$$

par suite, la quantité $(K : K') : (d : d')^4$ est projective (*).

21. On démontre de même le théorème suivant :

Si A est un point quelconque de la droite joignant deux points M et M′, appartenant respectivement à deux courbes gauches (C) et (C′), α un plan mené arbitrairement par l'intersection des plans osculateurs μ et μ' en ces points, la quantité

$$(\tau' : \tau)\left(\frac{MA : M'A}{\sin(\alpha\mu) : \sin(\alpha\mu')}\right)^2,$$

dans laquelle τ et τ' désignent les rayons de torsion de (C) et (C′) en M et M′, est projective.

Si les éléments A et α sont incidents, l'expression considérée peut se mettre sous la forme

$$(\tau : \tau')(d : d')^2 \quad (**);$$

d et d' sont les distances des points M′ et M respectivement aux plans μ et μ'.

Le théorème précédent se déduit aisément du théorème concernant deux surfaces Σ et Σ'. Les asymptotiques de deux surfaces homologues se correspondent, et le rayon de torsion τ d'une asymptotique est donné par la formule

$$\tau = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

22. Supposons les points M et M′ sur une cubique gauche; cette courbe se correspond à elle-même dans un système

(*) Mehmke, *loc. cit.*

(**) Idem, *loc. cit.*

Digitized by Google

involutif gauche, dont les axes sont deux droites associées, s'appuyant sur la cubique, en deux points séparés harmoniquement par M et M'. Les correspondants de M et M' dans cette projectivité sont respectivement M' et M. Donc,

$$\frac{\tau d^2}{\tau' d'^2} = \frac{\tau' d'^2}{\tau d^2};$$

par suite,

$$\tau d^2 = \tau' d'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Si τ et τ' sont les rayons de torsion en deux points M *et* M' *d'une cubique gauche,* d *et* d' *les distances des points* M' *et* M, *respectivement aux plans osculateurs à la courbe en* M *et* M', *on a*

$$\tau d^2 = \tau' d'^2.$$

23. Soient Σ, Σ_1, C deux coniques et un cercle dans un même plan, tangents en un point M; m, m_1, m_2 les secondes cordes d'intersection des courbes Σ et C, Σ_1 et C, Σ_1 et Σ_2; ρ et ρ_1 les rayons de courbure des courbes Σ et Σ_1 en M; R le rayon du cercle C. La conique Σ et le cercle C sont homologiques; le centre d'homologie est le point M, l'axe d'homologie est la droite m. Cet axe est parallèle à la corde de courbure de Σ au point M. Donc, si A et B sont les points d'intersection de cette corde de courbure avec la conique Σ et le cercle C, le coefficient d'homologie est $\frac{MA}{MB}$ ou $\frac{\rho}{R}$.

De même, les courbes Σ_1 et C sont homologiques, et le coefficient d'homologie est $\frac{\rho_1}{R}$.

Les coniques Σ, Σ_1, C étant tangentes en M, les secondes cordes d'intersection m, m_1, m_2 de ces courbes prises deux à deux, concourent en un point P. Désignons par S, S_1, S_2, les points d'intersection des courbes Σ, Σ_1, C avec la droite MP;

$$(MPSS_2) = \frac{\rho}{R}, \quad (MPS_1S_2) = \frac{\rho_1}{R},$$

d'où

$$(MPSS_1) = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Digitized by Google

Mais les coniques Σ et Σ_1 sont homologiques, et m_2 est l'axe d'homologie; le coefficient d'homologie est donc $\frac{\rho}{\rho_1}$.

Deux coniques Σ et Σ_1, tangentes dans un même plan en un point M, *sont homologiques; le coefficient d'homologie est égal au quotient des rayons de courbure des deux courbes au point* M.

Cette propriété est implicitement contenue dans l'intéressante note de M. Fouret. Elle établit, pour deux courbes planes tangentes en un point M, la projectivité du quotient des rayons de courbure en ce point.

24. On peut déduire de cette projectivité celle du quotient des courbures totales au point de contact M, de deux surfaces Σ et Σ'.

Soient m et m' les deux tangentes conjuguées communes aux deux surfaces; n la normale au point M; M_1, m_1, m'_1, n_1 les éléments correspondants à M, m, m', n dans la projectivité.

Les droites m_1 et m'_1 sont les tangentes conjuguées, communes aux deux surfaces Σ_1 et Σ'_1 homologues de Σ et Σ'. Les sections normales de Σ et Σ' ayant pour tangente m, correspondent aux sections faites dans les surfaces Σ_1 et Σ'_1, par le plan m_1n_1.

Le quotient des rayons de courbure des deux premières sections est égal à celui des deux autres (23). Ce dernier quotient, d'après le théorème de Meusnier, est égal à celui des rayons de courbure des sections normales de Σ_1 et Σ'_1, tangentes à la droite m_1. Désignons par ρ et ρ', r et r', ρ_1 et ρ'_1, r_1 et r'_1 les rayons de courbure des sections normales des surfaces Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1, tangentes respectivement à m, m', m_1, m'_1;

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho_1}{r_1}, \quad \frac{\rho'}{r'} = \frac{\rho'_1}{r'_1};$$

par suite,

$$\frac{\rho\rho' \sin^2(mm')}{rr' \sin^2(mm')} = \frac{\rho_1\rho'_1 \sin^2(m_1m'_1)}{r_1r'_1 \sin^2(m_1m'_1)}.$$

Le premier membre représente le quotient des courbures

Digitized by Google

totales des surfaces Σ' et Σ au point M; le second, celui des courbures totales des surfaces Σ'_1 et Σ_1 au point M_1; par conséquent, le théorème est démontré.

25. Étant donnés deux systèmes plans réciproques, à une courbe (C) du premier, décrite par un point mobile M, correspond une courbe (C_1) du second, enveloppe de la droite m_1, homologue du point M. On sait que la tangente m à la courbe (C) au point M, et le point de contact M_1 de la tangente m_1 à la courbe (C_1), sont correspondants.

Les coordonnées du point mobile M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la réciprocité, les coordonnées de la droite homologue m_1 sont des fonctions de la même variable. Deux éléments correspondants M et m_1 sont déterminés par la même valeur de la variable indépendante t. Si l'on donne à cette valeur un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C), un point M' infiniment voisin de M, et sur la courbe (C_1) une tangente m'_1

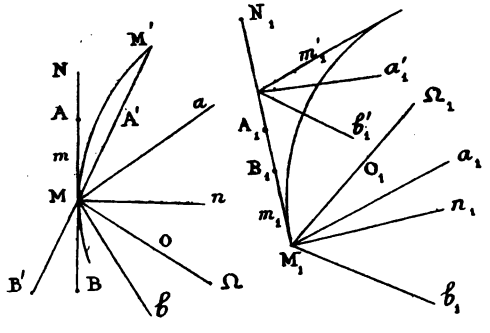


Fig. 4.

infiniment voisine de m_1 (fig. 4). Le point M' et la droite m'_1 déterminés par une même valeur $t + \Delta t$ de la variable indépendante, sont homologues dans les systèmes plans réciproques.

Digitized by Google

Appelons A′ et B′ deux points quelconques de la droite MM′, a'_1 et b'_1 les droites correspondantes. On sait que la ponctuelle décrite par un point est projective au faisceau des droites homologues; donc

$$(MA'M'B') = (m_1a'_1m'_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{MM'}{\Delta s} \cdot \frac{A'B'}{M'A' \cdot MB'} = \lim \frac{\omega_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(m_1m'_1)}{\omega_1} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(m'_1a'_1) \cdot \sin(m_1b'_1)};$$

ω_1 est l'angle de contingence de la courbe (C_1) au point M_1; par suite,

$$ds \cdot \frac{AB}{MA \cdot MB} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

A et B sont deux points quelconques de la tangente m, a_1 et b_1 sont les droites homologues. De même, si A_1 et B_1 sont deux points de m_1, a et b leurs droites correspondantes, on a

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}.$$

Des deux dernières formules on déduit

$$\rho \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(am) \cdot \sin(bm)}{\sin(ab)} = \frac{1}{\rho_1} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}. \quad (20)$$

Substituons aux points A et A_1 les points N et N_1 correspondant, le premier à la normale n_1 à la courbe (C_1) au point M_1, le second à la normale n à la courbe (C) au point M; supposons les points B et B_1 à l'infini, et désignons par o_1 et o les droites homologues de ces points. La formule (20) devient

$$\rho\rho_1 = \frac{MN \cdot M_1N_1}{\operatorname{tg}(mo) \cdot \operatorname{tg}(m_1o_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

26. Supposons les courbes (C) et (C_1) polaires réciproques,

Digitized by Google

par rapport à un cercle de centre O et de rayon a. Désignons par M_2 le point om_1; par φ l'angle (nn_1), lequel est égal à (oo_1);

$$(mo) = (m_1o_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad MN = \frac{OM}{\sin \varphi};$$

$$M_1N_1 = \frac{OM_1}{\sin \varphi}; \quad OM \cdot OM_2 = a^2.$$

Par conséquent,

$$pp_1 \cos^3 \varphi = a^2 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

27. Représentons par n et n_1 les longueurs des normales polaires des courbes (C) et (C_1) aux points M et M_1, le centre O étant l'origine :

$$MN = n \operatorname{tg} (mo), \quad M_1N_1 = n_1 \operatorname{tg} (m_1o_1);$$

donc

$$pp_1 = nn_1 \text{ (**)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

28. Supposons que dans la formule (20), les droites a, b, a_1, b_1 soient deux couples de droites isotropes conjuguées. Les points A et B sont les éléments doubles d'une involution (I), perspective à l'involution de rayons qui, dans la première figure, correspond à l'involution définissant les points cycliques de la seconde. De même, A_1 et B_1 sont les éléments doubles d'une involution (I_1), perspective à l'involution de rayons qui, dans la seconde figure, correspond à l'involution définissant les points cycliques de la première.

(*) MANNHEIM, *Transformations par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.* (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1866, p. 193.)

SERVAIS, *Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée.* (MATHESIS, 2e série, t. I, p. 87.)

(**) D'OCAGNE, *Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, 1887, p. 314.)

SERVAIS, *ibid.*, p. 88.

Digitized by Google

Soient O et O_1, P_m et P_{m_1} les points centraux et les puissances des involutions (I) et (I_1);

$$\frac{MA \cdot MB}{AB} = \frac{\overline{MO}^2 - P_m}{2\sqrt{P_m}}, \quad \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} = \frac{\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}}{2\sqrt{P_{m_1}}},$$

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\cdot\sin(b_1m_1)} = 2\sqrt{-1}.$$

Par suite,

$$pp_1 = \frac{\left(\overline{MO}^2 - P_m\right)\left(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}\right)}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Si les figures sont réciproques par rapport à un cercle de centre C,

$$\overline{MO}^2 - P_m = \overline{MC}^2, \quad \overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1} = \overline{M_1C}^2,$$

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{P_m} = OC, \quad \sqrt{-1}\ \sqrt{P_{m_1}} = O_1C;$$

donc

$$pp_1 = \frac{\overline{MC}^2\ \overline{M_1C}^2}{OC \cdot O_1C}.$$

29. Étant donnés deux espaces réciproques, aux points M, aux tangentes m et aux plans osculateurs μ d'une courbe gauche (C), correspondent respectivement les plans osculateurs μ_1, les tangentes m_1, et les points M_1 d'une courbe gauche (C_1). Les coordonnées du point M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la réciprocité, les coordonnées du plan homologue μ_1 sont des fonctions de la même variable. Les éléments correspondants M et μ_1 sont déterminés par une même valeur de la variable indépendante t. Si l'on donne à cette valeur un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C) un point M' infiniment voisin de M, et sur la couche (C_1) un plan osculateur μ_1' infiniment voisin de μ_1 (fig. 5). Le point M' et le plan μ_1' déter-

Digitized by Google

minés par une même valeur $t + \Delta t$ de la variable indépendante, sont homologues dans les espaces réciproques.

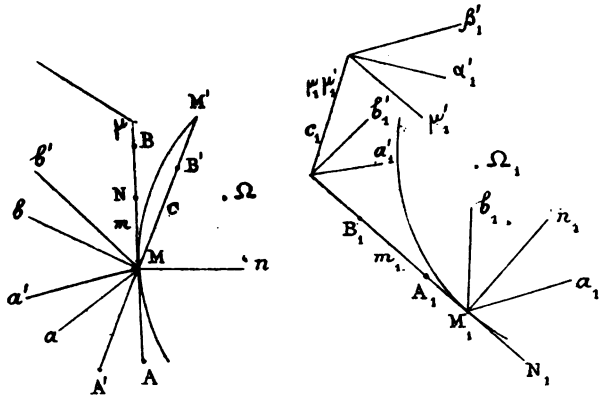


Fig. 5.

Appelons A′ et B′ deux points quelconques de la droite MM′, α_1' et β_1' les plans correspondants;

$$(MA'M'B') = (\mu_1\alpha_1'\mu_1'\beta_1'),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{MM'}{\Delta s} \cdot \frac{A'B'}{M'A' \cdot MB} = \lim \frac{\eta_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\mu_1\mu_1')}{\eta_1} \cdot \frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1')\sin(\beta_1'\mu_1)};$$

η_1 est l'angle de torsion de la courbe (C_1) au point M_1; par suite,

$$ds \frac{AB}{MA \cdot MB} = \eta_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

A et B sont deux points quelconques de la tangente m, α_1 et β_1 sont les plans homologues. De même, si A_1 et B_1 sont deux points de m_1, α et β les plans correspondants,

$$\eta \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}.$$

Digitized by Google

Des deux dernières formules, on déduit

$$\tau \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)} = \frac{1}{\tau_1} \frac{M_1A_1 \quad M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\sigma_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}. \quad (26)$$

C'est la relation qui lie les rayons de torsion des courbes réciproques (C) et (C_1), aux points M et M_1.

Appelons n et n_1 les binormales des courbes (C) et (C_1), aux points M et M_1 ; ν et ν_1 les plans mn et m_1n_1 ; N et Ω les points du premier espace, correspondant au plan ν_1 et au plan à l'infini du second ; N_1 et Ω_1 les points du second espace, correspondant au plan ν et au plan à l'infini du premier; ω et ω_1 les plans déterminés par les couples d'éléments m et Ω, m_1 et Ω_1 ; ces plans correspondent respectivement, aux points à l'infini des droites m_1 et m.

Les formules (25) et (26) deviennent alors

$$\frac{ds}{MN} = \frac{\gamma_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}, \quad \ldots \quad (27)$$

$$\tau\tau_1 = \frac{MN \cdot M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad \ldots \quad (28)$$

30. Supposons les courbes (C) et (C_1) polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O et de rayon a (fig. 6). Les points Ω et Ω_1 sont réunis en O.

Le rayon OM_1 est normal au plan μ ; la tangente m_1, perpendiculaire à sa conjuguée m par rapport à la sphère, est située dans le plan μ_1, normal à OM. Par suite, m_1 est perpendiculaire au plan Om ou ω, et l'angle $(\mu\omega)$ est égal à celui des droites OM_1 et m_1.

De même l'angle $(\mu_1\omega_1)$ est celui des droites OM et m.

Le triangle OMN est rectangle en O ; car le diamètre ON est normal au plan des droites n_1 et m_1, qui est le plan polaire de N. Le diamètre ON est donc perpendiculaire à n_1 et à sa parallèle OM.

De même le triangle OM_1N_1 est rectangle en O.

Digitized by Google

On déduit de là les égalités

$$MN = \frac{OM}{\cos(\mu_1\omega_1)}, \quad M_1N_1 = \frac{OM_1}{\cos(\mu\omega)}.$$

On a donc

$$\tau\tau_1 = \frac{OM \cdot OM_1}{\sin(\mu\omega)\sin(\mu_1\omega_1)}.$$

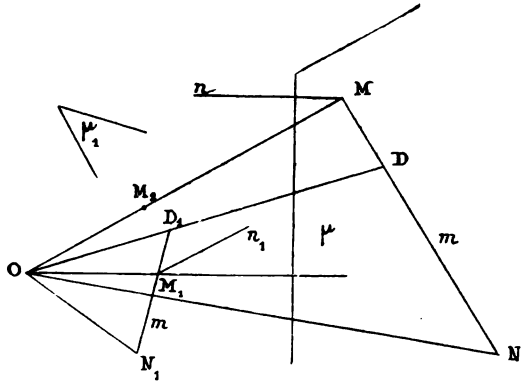


Fig. 6.

La plus courte distance des droites conjuguées m et m_1 passe par le centre O; représentons par D et D_1 ses points d'appui sur m et m_1;

$$OD = OM \sin(\mu_1\omega_1), \quad OD_1 = OM_1 \sin(\mu\omega);$$

donc

$$\tau\tau_1 = \frac{\overline{OM}^2 \cdot \overline{OM_1}^2}{OD \cdot OD_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Si M_2 est la trace du diamètre OM sur le plan osculateur μ_1, φ l'angle des binormales n et n_1, ou des diamètres OM, OM_1,

$$OM \cdot OM_2 = a^2, \quad OD \cdot OD_1 = a^2,$$

$$OM_2 = OM_1 \cos\varphi;$$

Digitized by Google

par conséquent,

$$\tau\tau_1 \cos^2\varphi = a^2 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

21. Reprenons le cas général de deux courbes gauches réciproques (29, fig. 5). Dans le plan $m\mathrm{M}'$, le point M est le centre d'un faisceau de rayons $(a', b', \ldots)$; le faisceau homologue $(a'_1, b'_1, \ldots)$ est dans le plan μ_1, et a pour centre le point correspondant au plan $m\mathrm{M}'$. Désignons par c et c_1 les droites MM' et $\mu_1\mu'_1$;

$$(ma'cb') = (m_1a'_1c_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\Delta\alpha} \cdot \frac{\omega}{\Delta t} \frac{\sin(a'b')}{\sin(ac) \cdot \sin(b'm)} = \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\Delta t} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(a'_1c_1) \cdot \sin(b'_1m_1)}.$$

Mais

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} = \frac{1}{2}; \quad \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} = \frac{1}{2};$$

par suite,

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am) \cdot \sin(bm)} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \quad . \quad (31)$$

a et b sont deux droites issues de M dans le plan osculateur μ; a_1 et b_1 sont leurs homologues.

On a trouvé précédemment

$$ds \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{MA} \cdot \mathrm{MB}} = \gamma_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Les égalités (25) et (31) donnent

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{MA.MB}}{\mathrm{AB}} \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{\tau_1}{\rho_1} \frac{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \cdot (32)$$

(*) DEMOULIN, *Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques.* (COMPTES RENDUS, séance du 16 mai 1892.)

Digitized by Google

23. Soient Σ et Σ_1 deux surfaces correspondantes dans deux espaces réciproques, m et m' deux tangentes conjuguées de Σ, situées dans le plan tangent μ au point M de cette surface. Les droites m_1 et m'_1 homologues de m et m' sont deux tangentes conjuguées de Σ_1, et déterminent le plan tangent μ_1, en un point M_1 de cette surface. Le point M_1 correspond au plan μ, et le plan μ_1 est l'homologue du point M (fig. 7).

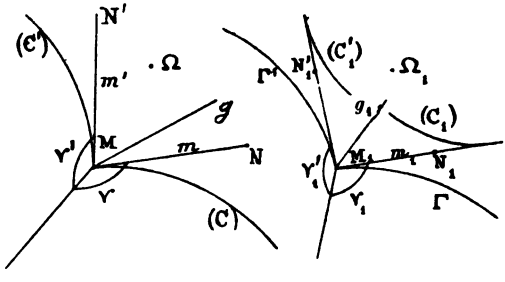


Fig. 7.

A une courbe (C) de Σ, tangente à la droite m, correspond une courbe (C_1), dont les plans osculateurs sont tangents à Σ_1, le long d'une courbe Γ', tangente à la droite m'_1. Car les points de Γ' correspondent aux plans tangents à Σ, le long de (C), et on sait que la droite m' est la limite de l'intersection des plans tangents à Σ, en deux points infiniment voisins M et M' de (C). La droite m'_1, homologue de m', est donc la limite de la droite joignant deux points infiniment voisins M_1 et M'_1 de Γ'.

De même, à une courbe (C') de Σ tangente à m', correspond une courbe (C'_1) dont les plans osculateurs sont tangents à Σ_1, le long d'une courbe Γ tangente à m_1.

Représentons par ds la différentielle de l'arc de la courbe (C) au point M, par ψ l'angle des plans tangents à Σ, aux points M et M' de la courbe (C). Les quantités ds' et ψ' pour (C'), ds_1 et ψ_1 pour Γ, ds'_1 et ψ'_1 pour Γ', auront une signification analogue.

Digitized by Google

On peut appliquer aux courbes (C) et (C_1), (C') et (C_1') la formule (25); on a ainsi

$$ds\frac{AB}{MA\,.\,MB}=\eta_1\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$ds'\frac{A'B'}{MA'.\,MB'}=\eta_1'\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

Mais

$$\eta_1=\psi_1',\quad \eta_1'=\psi_1;$$

donc

$$ds\,.\,ds'.\frac{AB}{MA.MB}.\frac{A'B'}{MA'.MB'}=\psi_1.\psi_1'\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}.\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1).\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

On a de même

$$\psi\,.\,\psi'.\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\ \sin(\beta\mu)}\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha_1'\mu).\sin(\beta'\mu)}=ds_1ds_1'\frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\frac{A_1'B_1'}{M_1A_1'\,.\,M_1B_1'}.$$

Rappelons que les couples A et B, A_1 et B_1, A' et B', A_1' et B_1' sont respectivement sur m, m_1, m', m_1' et que α_1 et β_1, α et β, α_1' et β_1', α' et β' sont leurs plans correspondants. Mais

$$\frac{ds}{\psi}=\sqrt{\rho\rho_0}.\qquad \frac{ds_1}{\psi_1}=\sqrt{\rho_1\rho_{01}},$$

$$\frac{ds'}{\psi'}=\sqrt{\rho'\rho_0'},\qquad \frac{ds_1'}{\psi_1'}=\sqrt{\rho_1'\rho_{01}'}.$$

Les notations ρ et ρ_0 sont définies au numéro 10, pour la courbe (C); ρ' et ρ_0', ρ_1 et ρ_{01}, ρ_1' et ρ_{01}' sont les quantités analogues pour les courbes (C'), Γ, Γ'.

Donc

$$\sqrt{\rho\rho_0}\,\sqrt{\rho'\rho_0'}\,\frac{AB}{MA\,.\,MB}\,\frac{A'B'}{MA'\,.\,MB'}\,\frac{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)}\,\frac{\sin(\alpha'\mu)\,.\,\sin(\beta'\mu)}{\sin(\alpha'\beta')}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_{01}}}\,\frac{1}{\sqrt{\rho_1'\rho_{01}'}}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{M_1A_1'\,.\,M_1B_1'}{A_1'B_1'}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}\,\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

Digitized by Google

On a aussi (11)

$$\sqrt{\rho\rho_0}\,.\,\sqrt{\rho'\rho'_0} = R_1R_2,$$

$$\sqrt{\rho_1\rho_{01}}\,.\,\sqrt{\rho'_1\rho'_{01}} = R_{11}R_{21}.$$

R_1 et R_2, R_{11} et R_{21} sont les rayons de courbure principaux de Σ et Σ_1, aux points M et M_1. Par conséquent

$$\frac{R_1R_2\,.\,R_{11}R_{21}}{\left.\begin{array}{l} \dfrac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\dfrac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\cdot\dfrac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \\ \times\dfrac{MA'\,.\,MB'}{A'B'}\cdot\dfrac{M_1A'_1\,.\,M_1B'_1}{A'_1B'_1}\cdot\dfrac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\mu)\,.\,\sin(\beta'\mu)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\alpha'_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta'_1\mu_1)} \end{array}\right\}} \quad (33)$$

Telle est la relation qui lie les courbures totales des surfaces réciproques Σ et Σ_1 aux points M et M_1.

33. Remarque. Deux surfaces Σ et Σ' tangentes en M au plan μ, ont deux tangentes conjuguées communes. Par suite, les courbures totales $\frac{1}{R_1R_2}$ et $\frac{1}{R'_1R'_2}$ de ces surfaces au point M, sont liées aux courbures totales $\frac{1}{R_{11}R_{21}}$ et $\frac{1}{R'_{11}R'_{21}}$, des surfaces réciproques Σ_1 et Σ'_1 au point M_1, par l'égalité

$$R_1R_2\,.\,R_{11}R_{21} = R'_1R'_2\,.\,R'_{11}R'_{21}.$$

Il en résulte que le second membre de la formule (33) ne change pas si l'on remplace le premier facteur

$$\frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\cdot\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$

relatif à deux droites homologues m et m_1, par le facteur analogue relatif à deux droites homologues quelconques m'' et m''_1, issues de M et M_1 dans les plans μ et μ_1. Car m' et m'' peuvent être considérées comme conjuguées, par rapport à une surface Σ' tangente en M au plan μ. Donc,

Soient dans une figure (E), *un point* M *et un plan* μ *passant*

Digitized by Google

par M ; μ_1 *et* M_1 *les éléments correspondants à* M *et* μ *dans une figure* (E_1) *réciproque à* (E) ; m *et* m_1 *deux droites homologues des plans* μ *et* μ_1, *passant la première par* M, *la seconde par* M_1 ; A *et* B *deux points pris arbitrairement sur* m ; α_1 *et* β_1 *les plans homologues dans* (E_1) ; A_1 *et* B_1 *deux points pris arbitrairement sur* m_1 ; α *et* β *les plans correspondants dans* (E) ; *la quantité*

$$\frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \cdot \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\ \sin(\beta\mu)} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}$$

reste constante, si m *tourne autour de* M *dans le plan* μ.

Cette constante est égale à la racine carrée du produit $R_1R_2 \cdot R_{11}R_{21}$, des rayons de courbure principaux de deux surfaces réciproques Σ et Σ_1, tangentes respectivement aux plans μ et μ_1 en M et M_1. Ainsi,

$$= \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \Bigg\} (34)$$

De la propriété précédente résulte aussi que dans la formule (26),

$$\tau\tau_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)},$$

on peut supposer que les droites AB et A_1B_1 soient deux droites homologues quelconques, situées respectivement dans les plans μ et μ_1.

34. Supposons que dans la formule (26) ainsi généralisée, les plans α, β, α_1, β_1 soient isotropes ; elle devient

$$\tau\tau_1 = \frac{\left(\overline{MO}^2 - P_m\right)\left(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}\right)}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Au cercle imaginaire à l'infini correspondent, dans les deux figures, les cônes (Ω) et (Ω_1). O et P_m sont respectivement le

Digitized by Google

point central et la puissance de l'involution des points conjugués par rapport au cône (Ω), et situés sur une droite quelconque m du plan osculateur μ et passant par M. O_1 et P_{m_1} ont des significations analogues pour le cône (Ω_1) et la droite m_1 homologue de m.

Les calculs sont identiques à ceux du numéro **28**.

Si les figures sont réciproques par rapport à une sphère, la formule (35) donne immédiatement la relation (29).

On a de même, pour deux surfaces réciproques,

$$\sqrt{R_1R_2}\ \sqrt{R_{11}R_{21}} = \frac{\left(\overline{MO}^2 - P_m\right)\left(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}\right)}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}}.$$

Cette formule se déduit d'ailleurs de (35) et de

$$\tau = \sqrt{-R_1R_2},$$

qui donne le rayon de torsion d'une asymptotique d'une surface.

35. Une courbe gauche (C) dont toutes les tangentes font partie d'un complexe linéaire, se correspond à elle-même dans le système focal qui définit le complexe. Par suite, d'après les formules (26) et (28) généralisées au numéro **33**, on a

$$\tau = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\tau = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Donc, *si les tangentes d'une courbe gauche* (C) *sont des rayons d'un complexe linéaire, la torsion en un point* M *de la courbe est donnée par l'une des formules*

$$\tau = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$\tau = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}.$$

Digitized by Google

μ_1 est le plan osculateur à la courbe au point M ; A *et* B *deux points quelconques de ce plan, alignés sur* M ; *α_1 et β_1 les plans polaires de ces points;* N *un point de la droite* AB, *dont le plan polaire est normal à μ_1 ; ω_1 le plan diamétral passant par* AB.

36. Une quadrique se correspond à elle-même dans un système polaire, dont elle est la directrice. Par suite, les courbes (C) et Γ', considérées au numéro **33**, sont identiques, et l'égalité

$$ds \frac{AB}{MA \cdot MB} = \psi'_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}$$

donne

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

On a donc la propriété : *Soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique* Σ, M *et μ_1 le point d'intersection et le plan des deux droites* m *et* m_1 ; A *et* B *deux points de* m, *α_1 et β_1 leurs plans polaires ; ces plans passent par* m_1 ; *la quantité $\rho\rho_0$ relative à une courbe* (C) *tangente à la droite* m *au point* M, *est donnée par la formule*

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}.$$

Si le point B est à l'infini, en désignant par ω_1 le plan diamétral passant par m_1, on a

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{AM \sin(\alpha_1\omega_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\mu_1\omega_1)}$$

ou

$$\sqrt{\rho\rho_0} = AM\,[\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)].$$

Mais

$$\rho_0 = \rho \sin^2\varphi ;$$

donc

$$\rho_0 = AM \sin\varphi\,[\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)]. \quad . \quad . \quad (39)$$

Digitized by Google

La formule (39) met en évidence la propriété suivante du point central de la génératrice n (normale à Σ en M), de la normalie ayant pour directrice la courbe (C) :

Par un point quelconque A *de la tangente* m, *on mène deux plans parallèles à la tangente conjuguée* m_1, *le premier normal au plan polaire de* A, *le second normal au plan diamétral passant par* m_1; *ces deux plans coupent la normale* n *en deux points* R *et* S, *tels que le segment* SR *est égal à la distance du point* M *au point central relatif à la génératrice* n, *de la normalie ayant pour directrice une courbe* (C) *tangente à* m *au point* M.

En effet, menons par le point M un plan perpendiculaire à la tangente m_1; il coupe α_1 et ω_1 suivant deux droites a_1 et o_1. Soit A_1 la projection de A sur ce plan, la droite A_1R est perpendiculaire à a_1; on a

$$MR = MA_1 \operatorname{tg} MA_1R = MA_1 \operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) = MA \sin\varphi \operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1).$$

De même

$$SM = MA \sin\varphi \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1);$$

donc

$$SR = MA \sin\varphi [\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)] = \rho_0.$$

37. Dans le cas d'une quadrique Σ directrice d'un système polaire, la formule (34) donne

$$R_1R_2 = \frac{MA.MB}{AB} \cdot \frac{MA_1MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu_1).\sin(\beta\mu_1)} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1).\sin(\beta_1\mu_1)}. \quad (40)$$

Donc, *soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique* Σ; M *et* μ_1 *le point d'intersection et le plan de ces deux droites;* A *et* B *deux points de* m; A_1 *et* B_1 *deux points de* m_1; α_1, β_1, α, β *les plans polaires de ces points; la courbure totale de la quadrique au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = \frac{MA.MB}{AB} \cdot \frac{MA_1MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu_1)\sin(\beta\mu_1)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1).\sin(\beta_1\mu_1)}.$$

Digitized by Google

Si les tangentes m et m_1 coïncident avec une génératrice g de la surface, la formule (40) devient

$$\sqrt{R_1R_2} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

A et B sont deux points quelconques de la génératrice, α_1 et β_1 leurs plans polaires.

Si l'on suppose les points B et B_1 à l'infini ; les plans polaires de A et A_1 normaux à μ_1 ; en désignant ces derniers points par N et N_1 pour éviter toute confusion, et les plans β et β_1 par ω et ω_1, la formule (40) devient

$$R_1R_2 = \frac{MN \cdot MN_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Par suite, *soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique,* M *et* μ_1 *le point d'intersection et le plan de ces deux droites,* ω *et* ω_1 *les plans diamétraux passant par* m *et* m_1 ; N *et* N_1 *les pôles des plans menés normalement à* Σ *par* m *et* m_1 ; *la courbure totale de la quadrique au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = \frac{MN \cdot MN_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} .$$

Si m et m_1 coïncident avec une génératrice g,

$$\sqrt{R_1R_2} = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

38. Si les tangentes conjuguées m et m_1 sont rectangulaires, la formule (38) donne

$$R_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

car

$$\rho\rho_0 = \rho^2 \sin^2\varphi .$$

Digitized by Google

Si l'on prend pour A et B les points N et ∞, la formule (44) devient

$$R_1 = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Donc, *le rayon de courbure* R_1 *d'une section principale au point* M *d'une quadrique est donné par l'une des formules*

$$R_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$R_1 = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)};$$

μ_1 *est le plan tangent à la quadrique en* M; α_1 *et* β_1 *sont les plans polaires de deux points* A *et* B *de la tangente en* M *à la section principale;* N *est le pôle du plan* ν_1 *de la seconde section principale;* ω_1 *est le plan diamétral passant par la tangente* $\mu_1\nu_1$ *à la surface.*

39. Une conique Σ se correspond à elle-même dans un système plan polaire, dont elle est la directrice. Par suite, d'après la formule (24), la courbure en un point M de cette conique sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

A et B sont deux points de la tangente m_1 à la conique au point M, a_1 et b_1 leurs droites polaires.

La formule (46) peut s'écrire :

$$\rho = \frac{BM}{AB}[AM \operatorname{cotg}(b_1m_1) - AM \operatorname{cotg}(a_1m_1)]$$

Désignons par A_1 et B_1 les points d'intersection de la normale au point M, avec les perpendiculaires abaissées du point A sur les droites a_1 et b_1; l'égalité précédente devient

$$\rho = \frac{BM \cdot A_1B_1}{AB}.$$

Digitized by Google

Donc, *si* A *et* B *sont deux points quelconques de la tangente au point* M *d'une conique* Σ, A_1 *et* B_1 *les points d'intersection de la normale en* M *avec les perpendiculaires abaissées du point* A *sur les polaires de* A *et* B, *le rayon de courbure de* Σ *en* M *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{A_1B_1 \cdot BM}{AB}.$$

Si le point B est à l'infini, sa polaire est le diamètre passant par le point M, et on retrouve un théorème dû à Ribaucour :

$$\rho = A_1B_1 \ (^*).$$

40. Soient g une génératrice d'une surface gauche Σ, M, M', A, B quatre points de la génératrice g; μ, μ', α, β les plans tangents en ces points;

$$(MAM'B) = (\mu\alpha\mu'\beta).$$

Si les points M et M' sont infiniment voisins,

$$\lim \frac{MM'}{\sin(\mu\mu')} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)}.$$

En désignant par n la normale à Σ au point M, $\lim \frac{MM'}{\sin(\mu\mu')}$ est le paramètre de distribution p, relatif à la génératrice n du paraboloïde des normales à Σ le long de g. Les plans des sections principales de Σ au point M sont tangents à ce paraboloïde, aux centres de courbure principaux de Σ au point M; donc, en représentant par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de Σ en M,

$$R_1R_2 = -p^2;$$

par suite,

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{MA}^2 \ \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\alpha\mu) \cdot \sin^2(\beta\mu)} \quad . \quad . \quad (47)$$

(*) Ribaucour, *Nouvelles Annales de mathématiques*, (2), t. XII, p. 172. — Servais, *Sur la courbure des sections coniques*. (Nouvelles Annales de mathématiques, (3 t. XI, p. 426.)

Digitized by Google

Ainsi, *si* M, A, B *sont trois points d'une même génératrice d'une surface gauche* Σ; μ, α, β, *les plans tangents en ces points, la courbure totale au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\alpha\mu) \cdot \sin^2(\beta\mu)}$$

Si R'_1 et R'_2 sont les rayons de courbure principaux au point A, on a

$$R'_1R'_2 = -\frac{\overline{AM}^2 \cdot \overline{AB}^2}{\overline{MB}^2} \frac{\sin^2(\beta\mu)}{\sin^2(\mu\alpha) \cdot \sin^2(\beta\alpha)};$$

donc

$$R_1R_2 \cdot R'_1R'_2 \sin^4(\alpha\mu) = \overline{MA}^4.$$

Soient M *et* A *deux points pris arbitrairement sur une génératrice* g *d'une surface gauche* Σ; μ *et* α *les plans tangents en ces points;* R_1 *et* R_2 *les rayons de courbure principaux de* Σ *en* M; R'_1 *et* R'_2 *les rayons de courbure principaux de* Σ *en* A. *Entre ces différentes quantités existe la relation*

$$R_1R_2 \cdot R'_1R'_2 \sin^4(\alpha\mu) = \overline{MA}^4 \quad (*).$$

A l'aide de la formule (47), on établit de même la propriété :

Soient k_a, k_b, k_c *les courbures totales en un trois points* A, B, C *d'une même génératrice d'une surface réglée* Σ; α, β, γ *les plans tangents en ces points; on a*

$$K_a \cdot K_b \cdot K_c = -\frac{\sin^2(\alpha\beta) \cdot \sin^2(\beta\gamma) \cdot \sin^2(\gamma\alpha)}{\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{CA}^2}.$$

41. Si A est le point central de la génératrice g, B son point de l'infini, la formule (47) devient

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{AM}^2}{\sin^2(\alpha\mu)\cos^2(\alpha\mu)}, \quad \ldots \quad (48)$$

(*) Demoulin, *Note sur deux classes particulières de congruences rectilignes.* (Bulletin des sciences mathématiques, t. XVIII, octobre 1894.)

Digitized by Google

ou $$R_1R_2 = -\overline{AM}^2[\cot g(\alpha\mu) + tg(\alpha\mu)]^2.$$

Si k est le paramètre de distribution relatif à g, on a

$$k = \frac{AM}{tg(\alpha\mu)};$$

donc

$$R_1R_2 = -\left(k + \frac{\overline{AM}^2}{k}\right)^2 (*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

42. Théorème. *Soient* g *et* g_1 *deux droites conjuguées d'un complexe linéaire, dont l'axe est* a *et le paramètre* k; M_1 *et* N_1 *deux points de* g_1 *dont les plans polaires* μ *et* ν *sont rectangulaires;* ω *le plan diamétral passant par* g; r_1 *la distance du point* M_1 *à l'axe* a; *on a*

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{tg(\mu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1a)}{\sin(ga)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

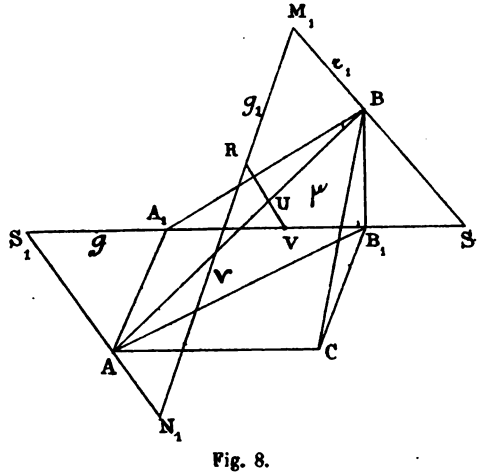


Fig. 8.

(*) Lamarle, *Théorie géométrique des centres et des axes instantanés de rotation.*

Digitized by Google

En effet, désignons par A et B les traces de l'axe a sur les plans μ et ν (fig. 8); par A_1 et B_1 les projections de A et de B sur la droite g; par C le quatrième sommet du rectangle construit sur AA_1 et BB_1 comme côtés. Le plan ABC est parallèle à ω, et l'angle CBB_1 est égal à $(\mu\omega)$.

L'angle ABA_1 est l'angle σ que l'axe AB fait avec le plan μ; on a

$$k = BM_1 \operatorname{tg}\sigma = BM_1 \cdot \frac{AA_1}{BA_1} = BM_1 \cdot \frac{B_1C}{BA_1},$$

$$\frac{BA_1}{BS} = \frac{BB_1}{B_1S}.$$

S désigne le point de rencontre des droites BM_1 et g. Donc

$$k = BM_1 \cdot \frac{B_1C \;\; B_1S}{BS \,.\, BB_1} = \frac{BM_1}{BS} B_1S \operatorname{tg}(\mu\omega).$$

On a aussi

$$\frac{r_1^2}{k} = \frac{BM_1}{\operatorname{tg}\sigma} = BM_1 \cdot \frac{A_1B}{AA_1} = BM_1 \frac{A_1B}{B_1C},$$

$$A_1B \,.\, BS = A_1S \,.\, BB_1;$$

donc

$$\frac{r_1^2}{k} = BM_1 \cdot \frac{A_1S \,.\, BB_1}{BS \,.\, B_1C} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{A_1S}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Par suite,

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{BM}{BS} \frac{B_1S \,.\, \operatorname{tg}^2(\mu\omega) + A_1S}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Mais

$$\overline{BB_1}^2 = B_1S \,.\, A_1B_1, \quad \overline{B_1C}^2 = \overline{AA_1}^2 = A_1S \,.\, A_1B_1,$$

S_1 désigne le point d'intersection des droites AN_1 et g,

$$\frac{\overline{BB_1}^2}{\overline{B_1C}^2} = \frac{B_1S}{A_1S_1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\mu\omega)};$$

par conséquent,

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{BM_1}{BS} \cdot \frac{SS_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Digitized by Google

D'autre part, si l'on désigne par R, U, V les points d'appui sur g_1, a, g de la plus courte distance des droites conjuguées g et g_1,

$$\frac{BM}{BS} = \frac{RU}{UV} = \frac{\operatorname{tg}(g_1 a)}{\operatorname{tg}(ga)},$$

$$SS_1 = \frac{AB}{\cos(ga)}, \quad M_1N_1 = \frac{AB}{\cos(g_1 a)}.$$

Donc

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1 a)}{\sin(ga)}.$$

43. Si s_1 désigne la distance du point N_1 à l'axe a, on a de même

$$k + \frac{s_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\nu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1 a)}{\sin(ga)}.$$

Par suite,

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right)\left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \overline{M_1N_1}^2 \frac{\sin^2(g_1 a)}{\sin^2(ga)},$$

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right) : \left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\nu\omega)}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Mais les droites g, g_1, a sont des génératrices d'un paraboloïde équilatère (fig. 8); les plans μ, ν sont tangents à cette surface respectivement en S et S_1; V est le point central sur la génératrice g; donc

$$\frac{\operatorname{tg}(\nu\omega)}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} = \frac{SV}{S_1V} = \frac{RM_1}{RN_1}.$$

Par suite, *soient* g *et* g_1 *deux droites conjuguées dans un système focal dont l'axe est* a; M_1 *et* N_1, *deux points de la droite* g_1, *tels que les plans polaires soient rectangulaires;* r_1 *et* s_1 *les distances de ces points à l'axe;* k *le paramètre du complexe linéaire;*

Digitized by Google

R *le point de* g_1 *situé sur la plus courte distance des droites* a *et* g_1 ; *on a*

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right)\left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \overline{M_1N_1}^2 \frac{\sin^2(g_1a)}{\sin^2(ga)}, \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right) : \left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \frac{RM_1}{RN_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

44. Si les droites g et g_1 coïncident, c'est-à-dire si g_1 est un rayon du complexe, la formule (50) devient

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Cette égalité, combinée avec la relation (37), donne

$$\tau = k + \frac{r_1^2}{k}.$$

Donc, *si les tangentes d'une courbe gauche* (C) *sont des rayons d'un complexe linéaire, la torsion en un point* M_1 *de la courbe est donnée par la formule*

$$\tau = k + \frac{r_1^2}{k},$$

k *est le paramètre du complexe,* r_1 *la distance du point* M_1 *à l'axe* (*).

45. On généralise aisément la formule (50). Soient, sur la droite M_1N_1, les points A_1 et B_1 dont les plans polaires sont α_1 et β_1. On a, d'après les formules (25) et (27),

$$\frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} = \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)}.$$

Donc, *si* g *et* g_1 *sont deux droites conjuguées d'un complexe*

(*) Appell, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement héliçoïdal d'un corps solide.* (Annales scientifiques de l'École normale, 1876.) — Demoulin, *Comptes rendus,* séance du 17 mai 1897.

Digitized by Google

linéaire; M_1, A_1, B_1 *trois points de* g_1; μ, α, β, *leurs plans polaires;* r_1 *la distance du point* M *à l'axe* a *du complexe, on a*

$$k + \frac{r_a^2}{k} = \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(g_1a)}{\sin(ga)} \quad . \quad (53)$$

Corollaire. Soient A_1, B_1, C_1 trois points de la droite g_1; α, β, γ leurs plans polaires; r_a, r_b, r_c les distances de ces points à l'axe du complexe; on a

$$\left(k + \frac{r_a^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_b^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_c^2}{k}\right) = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{\sin(\alpha\beta)\sin(\beta\gamma) \cdot \sin(\gamma\alpha)} \cdot \frac{\sin^3(g_1a)}{\sin^3(ga)} \cdot (54)$$

46. Nous avons établi la formule

$$\tau \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)} = \frac{1}{\tau_1} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}, \quad (26)$$

qui lie les rayons de torsion τ et τ_1 de deux courbes gauches réciproques (C) et (C_1) en deux points M et M_1. Dans le cas particulier du système focal, les tangentes m et m_1 des courbes (C) et (C_1) sont analogues à g et g_1, et on peut appliquer la formule (53) à chacun des groupes de points M_1, A_1, B_1 et M, A, B. Il en résulte immédiatement, en désignant par r et r_1 les distances des points M et M_1 à l'axe du système focal,

$$\tau\tau_1 = \left(k + \frac{r^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Cette relation entre les torsions de deux courbes correspondantes dans un système focal est due à M. Demoulin.

47. Soit Δ une ligne de courbure d'une quadrique Σ; Δ est l'intersection de Σ et d'une quadrique homofocale Σ_1. Les tangentes à la courbe Δ ont pour conjuguées relativement à Σ, les normales à la surface Σ_1 le long de Δ (fig. 9). Ces normales

Digitized by Google

sont les génératrices d'une surface développable, dont l'arête de rebroussement Δ_1 est la courbe polaire réciproque de Δ par

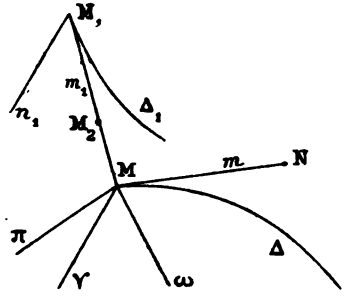


Fig. 9.

rapport à Σ. Cette courbe Δ_1 est aussi le lieu des centres de courbure des sections principales de Σ_1, tangentes à Δ. Appelons :

m et μ la tangente et le plan osculateur en un point M de la courbe Δ ; m_1 la tangente conjuguée de m ;

μ_1 le plan tangent à la quadrique Σ au point M ;

ν le plan normal à Σ mené par m ;

ω le plan diamétral passant par m.

Le pôle du plan μ par rapport à Σ est le centre de courbure M_1 de la section principale, faite dans la surface Σ_1 par le plan μ_1. Le pôle M_2 du plan ν est le second centre principal de courbure de la quadrique Σ_1 au point M (*). Cela étant, on a

$$(\mu_1\nu\mu\omega) = (MM_2M_1\infty),$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu_1\mu)}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega)} = \frac{MM_1}{M_2M_1} = \frac{\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}}{1 - \dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}}.$$

(*) SALMON, *Géométrie analytique*, § 197. — SERVAIS, *Sur la courbure des surfaces du second ordre*. (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 3e série, t. XXIV, p. 472.)

Digitized by Google

Mais nous avons démontré que si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure, au point M des sections principales de Σ, tangentes respectivement à m et m_1, on a

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{MM_1}{MM_2} = 1 \ (*);$$

donc

$$\operatorname{tg}(\mu_1\mu) = \frac{R_1 - R_2}{R_1} \operatorname{tg}(\mu_1\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Cette formule fait connaître l'inclinaison du plan osculateur μ de la ligne de courbure Δ sur le plan tangent μ_1 de la surface Σ.

Si ρ désigne le rayon de courbure de la courbe Δ au point M, la formule précédente et le théorème de Meusnier donnent

$$\rho = \frac{R_1(R_1 - R_2)\operatorname{tg}(\mu_1\omega)}{\sqrt{(R_1 - R_2)^2 \operatorname{tg}^2(\mu_1\omega) + R_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

48. La formule

$$\operatorname{tg}(\mu_1\mu) = \frac{R_1 - R_2}{R_1} \operatorname{tg}(\mu_1\omega)$$

établit la propriété :

Si des quadriques ont en un point M *même indicatrice, et si les lignes de courbure au point* M, *tangentes à un même axe de l'indicatrice, ont en ce point même plan osculateur, les centres de ces surfaces sont dans un même plan, passant par l'axe considéré.*

49. La formule

$$d\alpha \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = d\alpha_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)} \quad . \quad (31)$$

appliquée aux deux courbes Δ et Δ_1, donne, en tenant compte de l'égalité

$$ds = MM_1 d\alpha_1,$$

(*) SERVAIS, *Quelques propriétés des surfaces du second degré.* (IDEM, t. XXV, p. 782.)

Digitized by Google

la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{1}{MM_1}\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}. \quad (58)$$

Par conséquent, *dans le plan osculateur en un point* M *à une ligne de courbure* Δ *d'une quadrique, on trace par le point* M *deux droites quelconques* a *et* b. *Les conjuguées* a_1 *et* b_1 *de ces droites par rapport à la quadrique, se coupent au pôle* M_1 *du plan osculateur considéré. Le rayon de courbure de la courbe* Δ *au point* M *est donné par la formule*

$$\frac{1}{\rho}\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{1}{MM_1}\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}.$$

Bruxelles. — HAYEZ, imprimeur

Digitized by Google

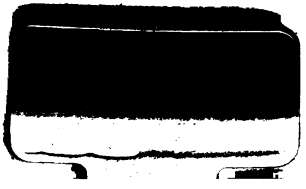
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06853 7664



Digitized by Google